



unione italiana disegno

DIALOGHI **DIALOGUES**

visioni e visualità *visions and visuality*

Testimoniare Comunicare Sperimentare
Witnessing Communicating Experimenting

43° CONVEGNO INTERNAZIONALE
DEI DOCENTI DELLE DISCIPLINE DELLA RAPPRESENTAZIONE
CONGRESSO DELLA UNIONE ITALIANA PER IL DISEGNO
ATTI 2022

43rd INTERNATIONAL CONFERENCE
OF REPRESENTATION DISCIPLINES TEACHERS
CONGRESS OF UNIONE ITALIANA PER IL DISEGNO
PROCEEDINGS 2022

a cura di/*edited by*
Carlo Battini, Enrica Bistagnino



FrancoAngeli OPEN  ACCESS

diségno

direttore Francesca Fatta
director Francesca Fatta

La Collana accoglie i volumi degli atti dei convegni annuali della Società Scientifica UID - Unione Italiana per il Disegno e gli esiti di incontri, ricerche e simposi di carattere internazionale organizzati nell'ambito delle attività promosse o patrocinate dalla UID. I temi riguardano il Settore Scientifico Disciplinare ICAR/17 Disegno con ambiti di ricerca anche interdisciplinari. I volumi degli atti sono redatti a valle di una *call* aperta a tutti e con un forte taglio internazionale. I testi sono in italiano o nella lingua madre dell'autore (francese, inglese, portoghese, spagnolo, tedesco) con traduzione integrale in lingua inglese. Il Comitato Scientifico internazionale comprende i membri del Comitato Tecnico Scientifico della UID e numerosi altri docenti stranieri esperti nel campo della Rappresentazione.

I volumi della collana possono essere pubblicati sia a stampa che in *open access* e tutti i contributi degli autori sono sottoposti a *double blind peer review* secondo i criteri di valutazione scientifica attualmente normati.

The Series contains the proceedings volumes of the annual conferences of the UID Scientific Society - *Unione Italiana per il Disegno* and the results of international meetings, researches and symposia organized as part of the activities promoted or sponsored by the UID. The themes concern the Scientific Disciplinary Sector ICAR / 17 *Disegno* including also interdisciplinary research fields. The volumes of the proceedings are drawn up following an open call and with a strong international focus. The texts are in Italian or in the author's mother tongue (English, French, German, Portuguese, Spanish,) with full translation into English. The International Scientific Committee includes the members of the Scientific Technical Committee of the UID and numerous other foreign teachers who are experts in the field of graphic representation.

The volumes of the series can be published both in print and in open access and all the contributions of the authors are evaluated by a double blind peer review according to the current scientific evaluation criteria.

Comitato Scientifico / Scientific Committee

Marcello Balzani *Università degli Studi di Ferrara*
Paolo Belardi *Università degli Studi di Perugia*
Stefano Bertocci *Università degli Studi di Firenze*
Carlo Bianchini *Sapienza Università di Roma*
Massimiliano Ciammaichella *Università IUAV di Venezia*
Enrico Cicalò *Università degli Studi di Sassari*
Mario Docci *Sapienza Università di Roma*
Edoardo Dotto *Università degli Studi di Catania*
Maria Linda Falcidieno *Università degli Studi di Genova*
Francesca Fatta *Università degli Studi Mediterranea di Reggio Calabria*
Andrea Giordano *Università degli Studi di Padova*
Elena Ippoliti *Sapienza Università di Roma*
Alessandro Luigini *Libera Università di Bolzano*
Francesco Maggio *Università degli Studi di Palermo*
Caterina Palestini *Università degli Studi "G. d'Annunzio" di Chieti-Pescara*
Rossella Salerno *Politecnico di Milano*
Alberto Sdegno *Università degli Studi di Udine*
Roberta Spallone *Politecnico di Torino*
Graziano Mario Valenti *Sapienza Università di Roma*
Chiara Vernizzi *Università degli Studi di Parma*
Ornella Zerlenga *Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"*

Componenti di strutture straniere / Foreign institution components

Marta Alonso *Universidad de Valladolid - Spagna*
Atxu Amann y Alcocer *ETSAM Universidad de Madrid (UPM) - Spagna*
Matthew Butcher *UCL Bartlett School of Architecture - Inghilterra*
Eduardo Carazo *Universidad de Valladolid - Spagna*
João Cabeleira *Universidade do Minho Escola de Arquitectura - Portogallo*
Alexandra Castro *Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto - Portogallo*
Angela Garcia Codoner *Universidad Politécnica de Valencia - Spagna*
Pilar Chías *Universidad de Alcalá - Spagna*
Noelia Galván Desvaux *Universidad de Valladolid - Spagna*
Pedro Antonio Janeiro *Universidade de Lisboa - Portogallo*
Gabriele Pierluisi *Ecole nationale supérieure d'architecture de Versailles - Francia*
Jörg Schröder *Leibniz Universität Hannover - Germania*
Carlos Montes Serrano *Universidad de Valladolid - Spagna*
José Antonio Franco Taboada *Universidade da Coruña - Spagna*
Annalisa Viati Navone *Ecole nationale supérieure d'architecture de Versailles - Francia*

FrancoAngeli

OPEN ACCESS

Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma FrancoAngeli Open Access (<http://bit.ly/francoangeli-oa>). FrancoAngeli Open Access è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli ne massimizza la visibilità e favorisce la facilità di ricerca per l'utente e la possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più:

http://www.francoangeli.it/come_pubblicare/pubblicare_19.asp

This volume is published in open access, i.e. the entire work file can be freely downloaded from the FrancoAngeli Open Access platform (<http://bit.ly/francoangeli-oa>).

FrancoAngeli Open Access is the platform for publishing articles and monographs, respecting ethical and qualitative standards and the provision of open access content. In addition to guarantee its storage in the major international OA archives and repositories and its integration with the entire catalog of F.A. magazines and series maximizes its visibility and promotes accessibility of search for the user and the possibility of impact for the author.

To know more:

http://www.francoangeli.it/come_pubblicare/pubblicare_19.asp

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: www.francoangeli.it e iscriversi nella home page al servizio "Informatemi" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

Readers wishing to find out about the books and magazines we publish can consult our website: www.francoangeli.it and register on the home page to the "Newsletter" service to receive news via e-mail.

DIALOGHI **DIALOGUES**

visioni e visualità *visions and visuality*

Testimoniare Comunicare Sperimentare *Witnessing Communicating Experimenting*

43° CONVEGNO INTERNAZIONALE
DEI DOCENTI DELLE DISCIPLINE DELLA RAPPRESENTAZIONE
CONGRESSO DELLA UNIONE ITALIANA PER IL DISEGNO
ATTI 2022

43rd INTERNATIONAL CONFERENCE
OF REPRESENTATION DISCIPLINES TEACHERS
CONGRESS OF UNIONE ITALIANA PER IL DISEGNO
PROCEEDINGS 2022

Genova | 15-16-17 settembre 2022
Genoa | September 15th-16th-17th 2022

Volume a cura di / **Volume edited by**
Carlo Battini, Enrica Bistagnino

ORGANIZZAZIONE E GESTIONE ATTI CONVEGNO
ORGANIZATION AND MANAGEMENT
OF CONFERENCE PROCEEDINGS

Programmazione, coordinamento delle attività e
della redazione conclusiva
Planning, coordination of activities and final
editing
Enrica Bistagnino

Gestione e controllo dei dati
Data management and control
Carlo Battini

Istruzione e gestione della piattaforma
Platform preparation and management
Cristina Candito

Revisione contenuti / **Content Review**
Maria Linda Falcidieno

Revisione impaginati / **Layouts review**
Giulia Pellegrini

Revisione e redazione impaginati
Layouts review and editing
Ruggero Torti

Verifica norme redazionali / **Editorial rules review**
Angela Zinno (coordinatore/coordinator)
Martina Castaldi
Irene De Natale
Alessandro Meloni

Impaginazione / **Lay out**
Valeria Piras (coordinatore/coordinator)
Irene De Natale
Gaia Leandri
Crystal Padoan
Beatrice Portaluri
Armando Presta

Revisione redazionale / **editorial review**
Armando Presta

Comitato Scientifico / Scientific Committee

Marcello Balzani *Università di Ferrara*
Paolo Belardi *Università di Perugia*
Stefano Bertocci *Università di Firenze*
Carlo Bianchini *Sapienza Università di Roma*
Massimiliano Ciammaichella *Università IUAV di Venezia*
Enrico Cicalò *Università di Sassari*
Mario Docci *Sapienza Università di Roma*
Edoardo Dotto *Università di Catania*
Maria Linda Falcidieno *Università di Genova*
Francesca Fatta *Università di Reggio Calabria*
Andrea Giordano *Università di Padova*
Elena Ippoliti *Sapienza Università di Roma*
Alessandro Luigini *Libera Università di Bolzano*
Francesco Maggio *Università di Palermo*
Caterina Palestini *Università di Chieti-Pescara*
Rossella Salerno *Politecnico di Milano*
Alberto Sdegno *Università di Udine*
Roberta Spallone *Politecnico di Torino*
Graziano Mario Valenti *Sapienza Università di Roma*
Chiara Vernizzi *Università di Parma*
Ornella Zerlenga *Università della Campania "Luigi Vanvitelli"*

Coordinamento Scientifico / Scientific Coordination

Maria Linda Falcidieno *Università di Genova*
Carlo Battini *Università di Genova*
Enrica Bistagnino *Università di Genova*
Cristina Candito *Università di Genova*
Massimo Malagugini *Università di Genova*
Michela Mazzucchelli *Università di Genova*
Giulia Pellegri *Università di Genova*
Maria Elisabetta Ruggiero *Università di Genova*
Michela Scaglione *Università di Genova*
Ruggero Torti *Università di Genova*

Comitato Promotore / Promoting Committee

Carlo Battini *Università di Genova*
Enrica Bistagnino *Università di Genova*
Cristina Candito *Università di Genova*
Maria Linda Falcidieno *Università di Genova*
Massimo Malagugini *Università di Genova*
Michela Mazzucchelli *Università di Genova*
Giulia Pellegri *Università di Genova*
Maria Elisabetta Ruggiero *Università di Genova*
Michela Scaglione *Università di Genova*
Ruggero Torti *Università di Genova*

**Organizzazione e gestione eventi/ Events
organization and management**

Massimo Malagugini *Università di Genova*
Giulia Pellegri *Università di Genova*
Maria Elisabetta Ruggiero *Università di Genova*

Identità viva convegno/Identità visiva convegno

Enrica Bistagnino *Università di Genova*
Maria Linda Falcidieno *Università di Genova*

**Coordinamento Segreteria Convegno /
Conference secretariat coordination**

Irene De Natale *Università di Genova*

*Si ringrazia il Magnifico Rettore dell'Università di Genova
prof. Federico Delfino per il fattivo contributo
alla realizzazione del convegno. /*

*We thank the Magnifico Rettore of the University
of Genoa prof. Federico Delfino for his active contribution
to the realization of the congress.*

*Con il patrocinio di / With the patronage of
Centro interdipartimentale sulla visualità **cIVIS***

ISBN digital version 9788835141938

**Comitato strutture straniere / Foreign institutions
components**

Marta Alonso *Universidad de Valladolid*
Atxu Amann y Alcocer *Universidad de Madrid*
Matthew Butcher *UCL Bartlett School of Architecture*
Eduardo Carazo *Universidad de Valladolid*
João Cabelreira *Universidade do Minho*
Alexandra Castro *Universidade do Porto*
Angela Garcia Codoner *Universidad Politécnica de Valencia*
Pilar Chías *Universidad de Alcalá*
Noelia Galván Desvaux *Universidad de Valladolid*
Pedro Antonio Janeiro *Universidade de Lisboa*
Gabriele Pierluisi *Ecole d'architecture de Versailles*
Jörg Schröder *Leibniz Universität Hannover*
Carlos Montes Serrano *Universidad de Valladolid*
José Antonio Franco Taboada *Universidad de Coruña*
Annalisa Viati Navone *Ecole d'architecture de Versailles*

Revisori / Peer Reviewers

Fabrizio Agnello
Maria Josefa Agudo Martínez
Marta Alonso Rodríguez
Alessio Altadonna
Giuseppe Amoruso
Renato Angeloni
Marinella Arena
Pasquale Argenziano
Alessandra Avella
Leonardo Baglioni
Vincenzo Bagnolo
Marcello Balzani
Laura Baratin
Cristiana Bartolomei
Paolo Belardi
Francesco Bergamo
Stefano Bertocci
Marco Giorgio Bevilacqua
Matteo Bigongari
Antonio Bixio
Maurizio Bocconcinio
Cecilia Maria Bolognesi
Paolo Borin
Alessio Bortot
Stefano Brusaporci
Giorgio Buratti
Giovanni Caffio
Antonio Calandriello
Marianna Calla
Daniele Calisi
Mara Capone
Eduardo Carazo
Alessio Cardaci
Laura Carlevaris
Marco Carpiceci
Camilla Casonato
Valentina Castagnolo
Gerardo Castro Reyes
Irene Cazzaro
Gerardo Maria Cennamo
Santi Centineo
Valeria Cera
Michela Ceracchi
Stefano Chiarenza
Pilar Chías
Emanuela Chiavoni
Massimiliano Ciammaichella
Margherita Cicala
Enrico Cicalò

Federico Cioli
Alessandra Cirafici
Vincenzo Cirillo
Luigi Cocchiarella
Sara Colaceci
Daniele Colistra
Antonio Conte
Luigi Corniello
Anastasia Cottini
Valeria Croce
Graziana D'Agostino
Pierpaolo D'Agostino
Saverio D'Auria
Salvatore Damiano
Giuseppe Damone
Pia Davico
Raffaella De Marco
Massimo De Paoli
Anna Dell'Amico
Giuseppe Di Gregorio
Antonella Di Luggo
Francesco Di Paola
Jaiver Domingo Ballestin
Eduardo Dotto
Alejandra Duarte Montes
Tommaso Empler
Elena Eramo
Jesús Esquinas-Dessy
Maria Linda Falcidieno
Eugenio Maria Falcone
Laura Farroni
Marco Fasolo
Francesca Fatta
Marco Filippucci
Fausta Fiorillo
Isabella Friso
Noelia Galván Desvaux
Carmine Gambardella
Amedeo Ganciu
Martina Gargiulo
Vincenza Garofalo
Raissa Garozzo
Fabrizio Gay
Gaetano Ginex
Elisabetta Caterina Giovannini
Gian Marco Girgenti
Sara Gonizzi Barsanti
Fabiana Guerriero
Rosina laderosa

Maria Pompeiana Iarossi
Manuela Incerti
Carlo Inglese
Alfonso Ippolito
Emanuela Lanzara
Giulia Lazzari
Gennaro Pio Lento
Massimo Leserri
Marco Limongiello
Massimiliano Lo Turco
Simone Lucchetti
Alessandro Luigini
Francesco Maggio
Francesco Maglioccola
Federica Maietti
Christiana Maiorano
Matteo Flavio Mancini
Carlos L. Marcos
Rosario Marrocco
Tomás Enrique Martínez Chao
Maria Martone
Valeria Marzocchella
Domenico Mediatì
Marco Medici
Felipe Corres Melachos
Giampiero Mele
Valeria Menchetelli
Isaac Mendoza
Alessandro Merlo
Davide Mezzino
Giuseppe Moglia
Sonia Mollica
Cosimo Monteleone
Carlos Montes Serrano
Caterina Morganti
Anna Osello
Alessandra Pagliano
Caterina Palestini
Alice Palmieri
Daniela Palomba
Lia Maria Papa
Spiros Papadopoulos
Leonardo Paris
Anna Maria Parodi
Roberto Pedone
Maurizio Perticarini
Francesca Picchio
Marta Pileri
Nicola Pisacane

*I testi e le relative traduzioni oltre che tutte le immagini
pubblicate sono stati forniti dai singoli autori per la pub-
blicazione con copyright e responsabilità scientifica e ver-
so terzi. La revisione e redazione è dei curatori del volume.*

*The texts as well as all published images have been pro-
vided by the authors for publication with copyright and
scientific responsibility towards third parties. The revision
and editing is by the editors of the book.*

11

Francesca Fatta

Prefazione | Preface

TESTIMONIARE WITNESSING

17

Maria Josefa Agudo-Martinez

Tadao Ando: *Minimal art y humanidad*

Tadao Ando: *Minimal art and humanity*

33

Alessio Altadonna, Adriana Arena

I disegni della chiesa della SS. Annunziata dei Catalani a Messina.

Tra rilievo e ricostruzione grafica

The drawings of the church of SS. Annunziata dei Catalani in Messina. Between survey and graphic reconstruction

55

Marinella Arena, Angeliki Assimakopoulou, Daniele Colistra, Domenico Mediati, Yannis D. Varalis

Hermitage of Saints Anargyroi, Kosmas and Damian:

Survey, Analysis, Enhancement

67

Martina Attenni, Alfonso Ippolito

Oltre l'apparenza. Comunicazione di un patrimonio sovrascritto

Beyond appearance. Communication of an overwritten heritage

87

Leonardo Baglioni, Michela Ceracchi, Marta Salvatore

Immagini della prospettiva: dialoghi tra spazio affine e spazio proiettivo

Images of perspective: dialogues between affine space and projective space

107

Cristiana Bartolomei, Caterina Morganti, Davide Prati

Strategie digitali per conoscere e valorizzare i modelli di fortificazioni di Luigi Ferdinando Marsili

Digital strategies for learning and valorising the models of fortifications by Luigi Ferdinando Marsili

123

Paolo Belardi

Da Perugia a Genova e poi ancora a Perugia: sui "disegni regolatori"

di Galeazzo Alessi

From Perugia to Genoa and then back to Perugia: on the "regulatory drawings" by Galeazzo Alessi

145

Rachele Angela Bernardello, Cosimo Monteleone

A Bridge Between East and West: Frank Lloyd Wright's Drawing as Synthesis of Two Different Cultures

153

Stefano Bertocci, Matteo Bigongjari, Gianlorenzo Dellabartola

Interpretazione dei progetti delle fortezze nel Codice Ashb.361 di Francesco di Giorgio Martini

Interpretation of the fortress projects in the Ashb.361 Code by Francesco di Giorgio Martini

171

Antonio Bixio, Giuseppe D'Angiulli, Letizia Albano

L'architettura manicomiale dei primi del Novecento a Potenza: da luogo della marginalità a luogo dell'abitare

Asylum architecture in Potenza in the early 20th century: from a place of marginality to a place for living

189

Alessio Bortot, Antonio Calandriello

La cupola della Cappella di Anet: indagine sui tracciati tridimensionali

The dome of Anet Chapel: investigation on geometrical drawing

205

Giovanni Caffio, Maurizio Unali

Verso una storia dell'Abitare Virtuale. Dal Cyberspace a Second Life fino al Meta-verso di Facebook e oltre

Toward a history of Virtual Living. From Cyberspace to Second Life to the Facebook Metaverse and beyond

221

Daniele Calisi, Alessandra Centroni, Maria Grazia Cianci

Il rilievo strumentale per la conoscenza analitica di stratificazioni storiche complesse: San Pietro in Vincoli

The instrumental survey for the analytical knowledge of complex historical stratifications: San Pietro in Vincoli

241

Eduardo Carazo, Álvaro Moral, Carmen Gimeno

El plano de Rivera Manescau y las cuatro colegiatas de Valladolid

Rivera Manescau's plan and the four collegiate churches of Valladolid

261

Alessio Cardaci, Antonella Versaci

I 'Torresini da Polvere' della Repubblica di Venezia: i depositi in via Beltrami a Bergamo e del forte San Felice a Chioggia

The 'Torresini da Polvere' of the Republic of Venice. The powderhouses in via Beltrami in Bergamo and in the San Felice fort in Chioggia

278

Marco Carpiceci, Daniele Bigi, Antonio Schiavo

I segni dell'Arco di Gallieno a Roma

The signs of Arch of Gallienus in Rome

298

Marco Carpiceci, Fabio Colonnese

Leonardo da Vinci e il padiglione d'acqua nel labirinto

Leonardo da Vinci and the water pavilion in the labyrinth

321

Camilla Casonato

Viaggiare attraverso la storia. I disegni giovanili di Viollet-le-Duc

Travelling through history: the early drawings of Viollet-le-Duc

335

Martina Castaldi

La qualità spaziale del sistema piazza-palazzo: Palazzi Domenico Grillo e Fieschi-Ravaschieri a Genova

The spatial quality of the square-palace system: Palaces Domenico Grillo and Fieschi-Ravaschieri in Genoa

351

Irene Cazzaro

Dialoghi tra diverse discipline (e lingue): una terminologia condivisa per le ricostruzioni digitali 3D ipotetiche e per la classificazione del loro livello di incertezza

Dialogues between different disciplines (and languages): a shared terminology for hypothetical 3D digital reconstructions and for the classification of their level of uncertainty

373

Mario Centofanti, Andrea Ruggieri, Pamela Maiezza, Alessandra Tata, Stefano Brusaporci

Dal 'progetto assente' alla 'architettura interrotta'. Il ruolo della modellazione digitale 3D nell'analisi storico-critica. Un caso di studio

From the 'absent project' to the 'halted architecture'. The role of digital 3D modeling in the historical-critical analysis. A case study

391

Pilar Chías, Tomás Abad, Lucas Fernández-Trapa

El agua en los paisajes históricos de los Reales Sitios: Aranjuez, El Escorial y La Granja

Water in the Historic Landscapes of the Spanish Royal Sites: Aranjuez, El Escorial and La Granja

411

Emanuela Chiavoni, Fabiana Carbonari, Fernando Gandolfi, Maria Belén Trivi

Rappresentazioni dell'architettura e dell'ambiente urbano. L'influenza italiana in Argentina

Representations of Architecture and Urban Environment. The Italian influence in Argentina

427

Emanuela Chiavoni, Sara Colaceci, Alfonso Ippolito, Vito Rocco Panetta, Federico Rebecchini, Luca Ribichini, Lorenzo Tarquini
Il rilievo di strada tra conoscenza e valorizzazione urbana: via dei Papareschi a Roma
Street Survey. Between knowledge and urban development: via dei Papareschi in Rome

451

Massimiliano Ciammaichella, Gabriella Liva
Visioni in movimento e spazi espositivi di memorie in transito
Visions in Motion and Exhibition Spaces of Transition Memories

469

Margherita Cicala
Testimoniare attraverso il rilievo. Segni e storia del Palazzo Conca a Napoli
Witnessing through survey. Signs and history of Conca Palace in Naples

487

Vincenzo Cirillo, Riccardo Miele
Copertura 'a bulbo' del campanile. Un di-segno visivo e visuale
The bulb covering of Neapolitan bell tower. A 'visual' de-sign

505

Paolo Clini, Ramona Quattrini, Romina Nespeca, Renato Angeloni, Mirco D'Alessio
In dialogo con i musei: innovazione e trasformazione digitale per una nuova visione del patrimonio
Dialogue with museums: innovation and digital transformation for a new vision of the cultural heritage

521

Valeria Croce
The Chapel of Sant'Agata in Pisa. 3D surveying, Artificial Intelligence and archival heritage

531

Giuseppe D'Acunto, Isabella Friso
Narrative codes and expressive styles in the Virtual Museum

539

Salvatore Damiano
Dialoghi fra storia e disegno: il progetto di Enrico Del Debbio per la Casa del Balilla di Enna
Dialogues between history and drawing: Enrico Del Debbio's project for the Casa del Balilla in Enna

559

Salvatore Damiano, Eleonora Di Mauro
Francesco Fichera e il Palazzo delle Poste per Noto: studio grafico su un edificio mai realizzato
Francesco Fichera and the Palazzo delle Poste for Noto: a graphic study of a never-built project

580

Massimo De Paoli, Luca Ercolin
Il Duomo di Ravenna: rilievo e modellazione dei sarcofagi di S. Rinaldo e di S. Barbaziano
The Cathedral of Ravenna: survey and modelling of the sarcophagi of St. Rinaldo and St. Barbatianus

596

Alejandra Duarte Montes, Daniel López Bragado, Victor Lafuente Sánchez
La Maqueta en el cine. Escala y perspectiva al servicio de la recreación espacial
The miniature in the cinema. Scale and perspective at the service of space recreation

610

Laura Farroni, Matteo Flavio Mancini
Sulla bellezza delle immagini per la narrazione del pensiero architettonico. Riflessioni sui disegni di progetto di Francesco Cellini
On the beauty of images for the narration of architectural thought. Reflections on Francesco Cellini's project drawings

628

Giuseppe Fortunato, Antonio Agostino Zappari
La colonna del tempio di Hera Lacinia presso Crotone tra vecchie e nuove restituzioni
The column of the temple of Hera Lacinia near Crotone between old and new restitutions

648

Martina Gargiulo, Davide Carleo, Giovanni Ciampi, Michelangelo Scorpio, Luigi Corniello, Pilar Chias Navarro
Il Jardines El Capricho a Madrid. Dall'analisi delle fonti d'archivio al rilievo fotogrammetrico
The Jardines El Capricho in Madrid. From the analysis of archival sources to the photogrammetric survey

662

Raissa Garozzo, Cettina Santagati
A graphical analysis of a skewed arched-masonry bridge along the Circumetnea railway track

672

Gian Marco Girgenti, Caterina Prinziavalli
The project for the "Galleria Orete" by Giuseppe Damiani Almeyda and other unbuilt "passages" in Palermo

682

Maria Pompeiana Iarossi, Cecilia Santacroce
Continuità dell'imprinting boitiano del disegno come educazione al progetto al Politecnico di Milano
Continuity of the Boitian imprinting of drawing as project education at the Politecnico di Milano

700

Manuela Incerti
La proiezione centrale come sistema di tracciamento sulle pseudo-cupole del V secolo
The central projection as a tracing system on the fifth century pseudo-domes

720

Carlo Inglese, Roberto Barni, Marika Griffo, Manuela Gianandrea, Serena Romano Gosetti di Sturmbeck, Guglielmo Villa
La basilica inferiore di San Crisogono: lettura morfometrica di un'architettura stratificata
San Crisogono's Basilica: a morphometric reading of layered architecture

736

Carlo Inglese, Simone Lucchetti
Iconografia e modelli digitali per una lettura critica del mausoleo di Cecilia Metella a Roma
Iconography and digital models for a critical reading of the mausoleum of Cecilia Metella in Rome

754

Pedro António Janeiro, Fabiana Guerriero
Representações icônicas entre desenho e objectos
Iconic representations between drawing and objects

770

Pedro António Janeiro, Dulce Loução, Gisele Melo De Carvalho
Image and classicism in housing social life spaces in Recife, Brasil

776

Francesco Maggio, Natalia Reginella
Le grafie e le visioni in Oltremare di Umberto Di Segni
The graphics and visions in Oltremare by Umberto Di Segni

796

Francesco Maglioccola, Simona Scandurra
Testimonianze di cultura orientale a Napoli: la pagoda della villa Doria d'Angri
Examples of oriental culture in Naples: the pagoda of Villa Doria d'Angri

816

Carlos L. Marcos
Ideation, representation and notation. The process of architectural design as a dialogue between the architect and architecture mediated through drawing

825

Maria Martone, Alessandra Marina Giugliano
La digitalizzazione di un percorso conoscitivo. Via del Parco Margherita a Napoli
The digitization of a cognitive path. Via del Parco Margherita in Naples

847

Isaac Mendoza Rodríguez
Algunos proyectos de los años setenta de J. L. Linazasoro: el uso de la línea para definir el espacio, la forma y la materialidad
Some projects of the seventies of J. L. Linazasoro: the use of the line to define space, form and materiality

863

Sonia Mollica
La normalizzazione iconografica della pittura vascolare per l'insegnamento. Il cratere attico del Pittore di Providence
The iconographic normalization of vase painting for teaching. The Attic crater of the Providence Painter

881

Sandro Parrinello, Anna Dell'Amica, Francesca Galasso
Arsinoe 3D. La narrazione digitale di uno scavo archeologico
Arsinoe 3D. A project for the digital narration of an archaeological excavation

903

Roberto Pedone, Rossella Laera
Le pratiche di design e la rappresentazione del benessere nella dimensione umana dello spazio domestico
Design practices and the representation of well-being in the human dimension of the domestic space

917

Assunta Pelliccio, Marco Saccucci, Virginia Miele
The graphic sign for historical narration of architecture. The fortifications of the Liri Valley

926

Valeria Piras
Rappresentazione dei modelli pedagogici del design, uno strumento di analisi critica
Representation of design pedagogical models, a tool for critical analysis

942

Manuela Piscitelli
Le illustrazioni dei bestiari medievali. Simboli e codici iconografici
The illustrations of medieval bestiaries. Symbols and iconographic codes

962

Matteo Pontoglio Emilii, Stefano Fasolini, Giuseppe Contessa

Il volto settecentesco del territorio bresciano: il barocco classicista della famiglia Marchetti

The eighteenth-century face of the Brescia area: the classicist baroque of the Marchetti family

980

Marta Quintilla Castán, Luis Agustín Hernández

Repositorio gráfico digital de la Iglesia de Santa María de Tobed

Digital graphic repository of the Church of Santa María de Tobed

998

Marta Alonso Rodríguez, Marta García García, Raquel Álvarez Arce, Noelia Galván Desvaux

Mackintosh, Bayer y los Eames: diálogos entre tipografía y arquitectura

Mackintosh, Bayer and the Eames: dialogues between typography and architecture

1012

Luca Rossato, Tejas Chauhan

Indian historic water structures: graphic studies and analyses to understand the significance of transition in a traditional stepwell

1022

Luca Rossato, Federica Maietti, Felipe Corres Melachos, Gabriele Giau

Beyond the glass house icons: graphic documentation of the correlations between Bo Bardi's and Johnson's studios

1033

Adriana Rossi, Umberto Palmieri, Sara Gonizzi Barsanti

Ripresentare il reperto di Hatra

Represent the find of Hatra

1049

Marcello Scalzo

Bernard Villemot: il disegno prima di tutto

Bernard Villemot: drawing first

1067

Simona Scandurra, Valeria Cera

Gli spazi della conservazione del vino: studio e rilievo delle bodegas spagnole

The places of wine conservation: study and survey of Spanish bodegas

1083

Alberto Sdegno, Silvia Masserano, Veronica Riavis

La Città Nuova di Sant'Elia: ricostruzione e simulazione video di due progetti per la metropoli del futuro

The Città Nuova by Sant'Elia: Advanced Simulation of Two Projects for the Metropolis of Future

1101

Ana Tagliari, Wilson Florio

The representation of the sun in Paulo Mendes da Rocha and Decio Tozzi architectural drawings

1111

Enza Tolla, Giuseppe Damone

Lo studio dell'iconografia urbana nella cartografia regionale lucana tra il XVIII e il XIX secolo: appunti e riflessioni

The study of urban iconography in the regional cartography between the XVIII and the XIX century: notes and reflections

1127

Ilaria Trizio, Adriana Marra, Francesca Savini

Tracce stratificate sulle murature storiche. Tra interpretazioni e ipotesi ricostruttive

Stratified traces on historic masonries. Interpretations and reconstructive hypotheses

1145

Pasquale Tunzi

Pluralità di argomenti e immagini nel "Repository of Arts" (1809-1829)

Plurality of topics and images in the "Repository of Arts" (1809-1829)

1159

Rita Valenti, Simona Gatto, Emanuela Paternò

Il racconto dei luoghi: indagini storico-rappresentative della facciata della chiesa di San Matteo a Scicli

The tale of places: historical-representative investigation of St. Matthew's church façade in Scicli

1179

Starlight Vattano

La città della Duplice Visione. Venezia nelle immagini di Raimund Abraham, 1978

The City of the Dual Vision. Venice in the images of Raimund Abraham, 1978

1195

Chiara Vernizzi, Chiara Finizza

Interpretazioni figurative per leggere e rappresentare le forme urbane di Venezia

Figurative interpretations to read and represent the urban forms of Venice

COMUNICARE COMMUNICATING

1215

Sabrina Acquaviva, Massimiliano Campi, Antonella Di Luggo, Marika Falcone,

Mario Ferrara, Daniela Palomba

Linguaggi e strumenti per indagare, conoscere e comunicare l'architettura

Languages and tools to investigate, know and communicate architecture

1239

Paola Ardizzola, Caterina Palestini

Disegno come dialogo fra arte e architettura. Forma e geometria nell'opera di Zvi Hecker

Drawing as dialogue between art and architecture. Form and geometry in Zvi Hecker's oeuvre

1261

Marcello Balzani, Federica Maietti, Luca Rossato, Dario Rizzi, Martina Suppa

Scenari di reverse processing nel rilievo architettonico da nuvola di punti

Reverse processing scenarios in architectural survey from point cloud

1279

Laura Baratin, Francesca Gasparetto

Di-segnare i muri del tempo e dello spazio. Intorno alla prassi analitico-compositiva delle opere di Oscar Piattella

Di-segnare the walls of time and space. Around the analytical-compositional praxis of Oscar Piattella's works

1295

Enrica Bistagnino

Pier Paolo Pasolini e Giuseppe Zigaina, testi e immagini per la plaquette "Dov'è la mia Patria"

Pier Paolo Pasolini and Giuseppe Zigaina, texts and images for the plaquette "Dov'è la mia Patria"

1311

Maurizio Marco Bocconcinco, Ursula Zich, Martino Pavignano

Disegno: letture integrate per l'interpretazione di conoscenze e competenze pre ingresso al PoliTO

Drawing: integrated readings for the interpretation of pre-entry knowledge and competences at PoliTO

1345

Cristina Boido, Pia Davico

Raccontare i caratteri di un luogo. Dialoghi tra rappresentazione, rilievo e restauro

Narrating the features of a place. Discussions on representation, surveying and restoration

1365

Cecilia Bolognesi, Fausta Fiorillo

Virtual reconstruction from scan to VR of architecture and landscape of a monumental park

1374

Alessandro Castellano

Legg[ia]bilità, tra grafica e inclusione

Legi[ia]bility, between graphics and inclusion

1386

Ilenio Celoria

Comporre, inquadrare, comunicare: rappresentazione dell'architettura negli scatti di Basilico, Ghirri e Fontana

Composing, framing, communicating: representation of architecture in the shots of Basilico, Ghirri and Fontana

1402

Gerardo Maria Cennamo

Semantica del disegno tra evoluzione digitale e codici archetipali

Drawing semantics between digital evolution and archetypal codes

1414

Stefano Chiarenza

Laboratori virtuali: innovazioni digitali per comunicare a distanza

Virtual labs: digital innovations for distance communication

1432

Anastasia Cottini

La documentazione digitale per la comunicazione del Patrimonio Culturale: il caso dell'Eremo delle Carceri ad Assisi

Digital documentation for the communication of Cultural Heritage: the case of the Eremo delle Carceri in Assisi

1448

Gabriella Curti

Rappresentare il movimento. Grafica bidimensionale e computer graphics tra XX e XXI secolo

Representing motion. From bidimensional to computer graphics in the 20th and 21st century

1464

Irene De Natale

Rappresentare il paesaggio urbano: segni per un'identità dinamica
Representing the urban landscape: signs for a dynamic identity

1476

Edoardo Dotto

Mentire allo sguardo: il mimetismo tra arte e scienza
Lying to the eye: the mimicry between art and science

1494

Eugenio Maria Falcone, Juan Saumell Lladó

Le radici del progetto. La rappresentazione dell'architettura.
Ipotesi di una grammatica per una nuova semiologia applicata
The roots of the project. The representation of architecture.
Hypothesis of a grammar for a new applied semiology

1508

Francesca Fatta, Paola Raffa

Raccontare Arte. Linguaggi creativi per l'infanzia
Telling Art. Creative Languages for Childhood

1530

Fabrizio Gay

Disegnare atmosfere: rifrazione semiotica di una salienza inglobante
Drawing atmospheres: semiotic refraction of an encompassing salience

1548

Fabrizio Gay

Il fulmine e la "reazione nera": disegno naturale e artificiale dei pattern tra Golgi e Simondon
The lightning and the "black reaction": natural and artificial pattern drawing between Golgi and Simondon

1568

Gaetano Ginex, Francesco Stilo, Lorella Pizzonia

Analysis and representation for Digital Humanities: la Mappa Mosaico di Madaba.
Digitalizzazione, analisi, decostruzione
Analysis and representation for Digital Humanities: The Madaba Mosaic Map.
Digitalization, analysis, deconstruction

1590

Silvia La Placa, Francesca Picchio

Strategie per la rappresentazione dei segni e degli iconemi del paesaggio irriguo pavese
Strategies for the representation of signs and iconemes of the Pavia irrigation landscape

1608

Gaia Leandri

"Di-segno" manuale e "De-sign" digitale, una scelta di comunicazione visiva
Freehand "Di-segno" and digital "De-sign", a choice of visual communication

1628

Novella Lecci, Alessandra Vezzi

Raccontare i reperti archeologici: un video olografico per la stele di "Auvele Feluske"
Telling the archaeological finds: a holographic video for the stele of "Auvele Feluske"

1644

Genaro Pio Lento

Il rilievo SAPR delle residenze reali di vacanza in Albania
The SAPR survey of royal holiday residences in Albania

1668

Massimo Leserri, Carla Ferreyra, Andrea di Filippo, Caterina Gabriella Guida

Optimising 3D interactive exploration of open virtual environments on web, using mobile devices

1677

Massimo Malagugini

La rappresentazione: un dialogo fra disegno e teatro
Representation: dialogue between drawing and theatre

1697

Valeria Marzocchella

Il forsennato paesaggio di Napoli. Foto e visioni interiori a confronto
The frenzied landscape of Naples. Photos and inner visions compared

1713

Davide Mezzino, Riccardo Antonino, Enrico Ferraris

Rappresentare la ricerca: metodi e strategie di comunicazione visiva in ambito museale
Representing the research: methods and strategies of visual communication in museums

1731

Carlos Montes Serrano, Sara Peña Fernández

Frank Lloyd Wright: Models in Exhibitions (1932-1949)

1737

Laura Mucciolo

Accumulazioni su Casa Palestra: abitare un'atmosfera
Accumulations on Casa Palestra: Dwelling an Atmosphere

1753

Alice Palmieri

Narrazioni e interpretazioni grafiche: proposte per un progetto di identità visiva del Carnevale di Palma Campania
Narratives and graphic interpretations: proposals for the visual identity project of the Palma Campania Carnival

1771

Lia Maria Papa

Alberi monumentali e giardini storici: un processo virtuoso di disseminazione e fruizione
Monumental trees and historical gardens: a virtuous process of dissemination and fruition

1789

Spiros Papadopoulos, Vassilis Bourdakis, Elena Mantzari, Aristides Vagelatos, Apostolia Galani, George Loukakis

Designing VR and AR gamifications for cultural heritage educational escape games

1797

Leonardo Paris

Virtual tour. Anywhere and nowhere

1805

Marta Pileri

Il dialogo tra saperi per la comunicazione del patrimonio culturale
The dialogue between knowledge for the cultural heritage communication

1821

Giovanna Ramaccini

Well-aging? Way-finding! La comunicazione ambientale per contesti age-friendly
Well-aging? Way-finding! Design strategies for age-friendly environments

1835

Leopoldo Repola

Cuma. Declinazioni del digitale
Cuma. Digital declension

1853

Felice Romano

Rappresentazioni vertiginose. Tre esempi: Perec, Lequeu, Douat
Vertiginous representations. Three examples: Perec, Lequeu, Douat

1873

Jessica Romor

Prospettiva e visualità: il volere della ragione, il valore dell'intenzione
Perspective and visuality: the volition of reason, the value of intention

1893

Michela Rossi, Giorgio Buratti, Greta Milino

Sinergie di linguaggi - figure e pattern per la retorica del metaverso
Language synergies - Figures and patterns for the metaverse rhetoric

1909

Maria Elisabetta Ruggiero

Brand Identity e nuovi media. Il caso studio del Platinum Jubilee
Brand Identity and new media. The Case Study of Platinum Jubilee

1927

Francesca Salvetti

Colour project as redevelopment of school environments. Colour and visual identity

1935

Nicoletta Sorrentino

La comunicazione visiva per il trasporto passeggeri navale: linguaggi, funzioni, criticità
Visual communication for naval passenger transport: languages, functions, issues

1949

Michele Valentino

Dialoghi tra disegno e testo nelle opere di Rem Koolhaas
Dialogues between drawing and text in Rem Koolhaas works

1961

Marco Vitali, Giulia Bertola, Francesca Ronco

Applicazioni di Motion graphic per la valorizzazione del patrimonio museale del Museo di Arte Orientale di Torino (MAO)
Motion graphic applications for the enhancement of the heritage of the Museum of Oriental Art in Turin (MAO)

1980

Angela Zinno

Per una rappresentazione multimodale del testo drammatico: ipotesi e traiettorie di un processo creativo
For a multimodal representation of the dramatic text: hypotheses and directions of a creative process

SPERIMENTARE EXPERIMENTING

1996

Fabrizio Agnello, Mirco Cannella, Marco Rosario Geraci

Mostrare l'invisibile: il soffitto trecentesco nascosto del convento di Santa Caterina a Palermo

Displaying the invisible: the 14th century hidden ceiling in the convent of Santa Caterina in Palermo

2016

Giuseppe Amoruso, Polina Mironenko

L'ipermodello BIM per gli allestimenti museali: programmazione visuale delle librerie parametriche

The BIM hyper model for museum exhibits: visual programming of parametric libraries

2036

Pasquale Argenziano, Alessandra Avella, Nicola Pisacane

Il disegno delle gemme sfaccettate. Fonti iconografiche e trattatistica, analisi geometrica, rilevamento, modellazione parametrica

Faceted gemstones drawing. Iconographic and treatise sources, geometric analysis, survey, parametric modelling

2058

Vincenzo Bagnolo, Andrea Pirinu, Raffaele Argiolas, Simone Cera

Dal disegno all'edificio e ritorno. Strumenti digitali per comunicare gli archivi di architettura

From drawing to building and back. Digital media to enhance architecture archives heritage

2074

Sara Gonizzi Barsanti, Santiago Lillo Giner

Oppido Mamertina in 3D: dalla fotogrammetria alla ricostruzione digitale

Oppido Mamertina in 3D: from photogrammetry to digital reconstruction

2090

Carlo Battini, Rita Vecchiattini

Potenzialità e limiti di sistemi mobile per il rilievo 3D

Potential and limitations of mobile systems for 3D surveying

2106

Fabio Bianconi, Marco Fillippucci

KID. Il disegno di un nuovo tipo di bicicletta

KID. Drawing of a new type of bicycle

2130

Maurizio Marco Bocconcino, Mariapaola Vozzola

Strumenti e procedure per il rilievo metrico speditivo di fronti urbani: informazioni, misure e disegni di massima come ausilio alle abilità artigianali

Tools and procedures for the expeditive metric survey of urban fronts: information, measurements and rough drawings as an aid to craft skills

2149

Marianna Calia, Antonio Conte

Visioni per ri-abitare i patrimoni fragili: sperimentare architetture nello spazio pubblico e nel paesaggio

Visions for re-inhabiting fragile heritages: experimenting with architecture in public space and landscape

2165

Massimiliano Campi, Valeria Cera, Marika Falcone, Mario Ferrara

La rappresentazione del territorio peri-urbano tra city modelling, rilievo e fotografia

The representation of the peri-urban territory between city modelling, survey and photography

2183

Cristina Cándito

Spazialità e orientamento nelle architetture ipogee, tra configurazione e rappresentazione

Spatiality and Orientation in Hypogean Architectures: between configuration and representation

2199

Mara Capone, Angela Cicala

Dalle "macchine inutili" alle "macchine utili". Algoritmi generativi per costruire le geometrie della trasformazione

From "useless machines" to "useful machines". Generative algorithms to build transformation geometries

2221

Matteo Cavaglià, Lorenzo Ceccon, Luigi Cocchiarella, Thomas Guido Comunian, Veronica Fazzina, Giulia Lazzaretto, Alessandro Martinelli, Caterina Morganti, Giulia Piccinin, Simone Porro, Lorenzo Tarquini, Nicolas Turchi

Digi Skills Bsc – Revising Graphic Literacy in Bsc Architectural Design Education through a Software-Based Pedagogic Approach. A Shared Pilot Experience at the Politecnico di Milano

2230

Santi Centineo

"Uno scheletro di teatro". L'esperienza teatrale di Alberto Burri e il Teatro Continuo

"A theatre skeleton". The theatrical experience of Alberto Burri and the Teatro Continuo

2250

Enrico Cicalò, Valeria Menchetelli

Psico-grafica. Dialoghi tra le scienze grafiche e le scienze psicologiche

Psycho-graphic. Dialogues between the graphic sciences and the psychological sciences

2272

Pierpaolo D'Agostino, Giuseppe Antuono, Pedro Vindrola

Ricostruzione e fruizione digitale di paesaggi perduti. Visioni di Palazzo d'Avalos in Procida

Digital reconstruction and fruition of lost landscapes. Views of Palazzo D'Avalos in Procida

2292

Saverio D'Auria, Erika Elefante, Maria Ines Pascariello

Frammenti urbani e nuove visualizzazioni: la piazzetta di San Gennaro all'Olmo a Napoli

Urban fragments and new views: the square of San Gennaro all'Olmo in Naples

2310

Fabrizio De Cesaris, Francesca Porfiri, Luca J. Senatore

Il Rilievo per l'emergenza: il caso di Palazzo Pallotta a Caldarola

Emergency survey: the case of Palazzo Pallotta in Caldarola

2324

Raffaella De Marco

La Forma strutturale: opportunità di articolazione topologica delle mesh geometriche al processo di conoscenza e simulazione in Architettura

The Structural Form: opportunities for a topological articulation of geometric meshes to the process of knowledge and simulation in Architecture

2344

Giuseppe Di Gregorio

Tra reale e virtuale: il medievale castello di Mussomeli

Between real and virtual: the medieval castle of Mussomeli

2364

Francesco Di Paola, Sara Morena, Sara Antinazzi

3D digital tools for the archaeological massive artifacts documentation

2374

Tommaso Empler, Fabio Quici, Adriana Caldaroni, Elena D'Angelo, Alexandra Fusinetti, Maria Laura Rossi

HBIM e ICT. Il BIM per la valorizzazione della Fortezza Pisana di Marciana

HBIM and ICT. BIM for valorize Pisan Fortress of Marciana

2394

Elena Eramo

Sul rapporto semantico tra dati grafici e numerici in un modello di valutazione del Rischio archeologico

The sematic relationship between graphic and numerical data in an archaeological heritage Risk assessment model

2410

Sara Erliche, Giulia Pellegrini

Cultural heritage survey and inclusive representation. The case of Villa Ottolenghi

2420

Jesús Esquinas-Dessy, Isabel Zaragoza

Diálogos con el lugar. Experimentando nuevas maneras de mirar y re-presentar

Site talks. Experimenting new ways of seeing and re-presenting

2439

Mariateresa Galizia, Graziana D'Agostino

Il rilievo e la rappresentazione del Teatro Sangiorgi di Catania, testimonianza e memoria documentale di usi e costumi del Novecento

The survey and representation of the Sangiorgi Theatre in Catania, testimony and documentary memory of 20th-century customs and traditions

2459

Noelia Galván Desvaux, Pablo Cendón Segovia, Marta Alonso Rodríguez, Raquel Álvarez Arce

Microorganismos marinos como fuente de inspiración y materia prima de la arquitectura: Richard Neutra y la serie Diatom

Marine microorganisms as a source of inspiration and raw material for architecture: Richard Neutra and the Diatom series

- 2479
Amedeo Ganciu, Andrea Sias
Visualizzare la conoscenza. La rappresentazione delle reti citazionali internazionali nell'ambito delle scienze grafiche
Visualising the knowledge. The representation of international citation networks in the graphic sciences
- 2503
Fabrizio Gay
Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria
Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry
- 2523
Elisabetta Caterina Giovannini, Francesca Ronco
Dentro il museo: creare esperienze culturali in realtà aumentata
Inside the museum: creating cultural experiences in augmented reality
- 2539
Fabiana Guerriero, Pedro Antonio Janeiro
Il sogno romantico di Francis Cook
The romantic dream of Francis Cook
- 2553
Domenico Iovane, Sabrina Acquaviva, Rosina Iaderosa
Immagini digitali per l'elaborazione e l'analisi del costruito. Lo scalone monumentale di San Leucio
Digital images for the elaboration and analysis of the building. The monumental stairs of San Leucio
- 2573
Emanuela Lanzara
Strumenti VPL per la scomposizione geometrico-semantica di figure piane complesse
VPL applications for geometric-semantic decomposition of complex planar figures
- 2593
Giulia Lazzari
L'eliminazione delle ombre nelle ortofoto: notazioni teoriche e procedure sperimentali
Removing shadows from orthophotos: theoretical indications and testing procedures
- 2607
Marco Limongiello, Angelo Lorusso, Anna Sanseverino, Barbara Messina
Conservazione predittiva di edifici storici attraverso un sistema basato sull'IoT
Predictive preservation of historic buildings through IoT-based system
- 2621
Andrea Lumini, Federico Cioli
La rappresentazione del suono. Rilievo digitale e modellazione 3D per la virtualizzazione multisensoriale di tre grandi teatri europei
The representation of sound. Digital survey and 3D modeling for the multisensory virtualization of three major European theaters
- 2645
Tomás Enrique Martínez Chao
Processi di segmentazione e classificazione di viabilità urbana tra analisi ed accessibilità
Segmentation and classification processes of urban roads between analysis and accessibility
- 2661
Marco Medici, Federico Ferrari, Andrea Sterpin
H-BIM semantico come strumento di documentazione inclusiva e accesso al Nuovo Catalogo Digitale dei Beni Culturali: il caso studio di Santa Maria delle Vergini a Macerata
Semantic H-BIM as a tool for inclusive documentation and access to the New Digital Catalogue of Cultural Heritage: the case study of Santa Maria delle Vergini in Macerata
- 2680
Alessandro Meloni
Architettura e Distruzione. Sperimentazioni sui disegni di Lebbeus Woods
Architecture and Destruction. Experimentation on drawings by Lebbeus Woods
- 2698
Alessandro Merlo, Gaia Lavoratti, Alessandro Manghi
In media res. Il ruolo del rilievo urbano nel PCRI tra Caletta di Castiglioncello e Lillatro (Rosignano Marittimo)
In media res. The role of urban relief in the Settlement Redevelopment Complex Programme (PCRI) between Caletta di Castiglioncello and Lillatro (Rosignano Marittimo)
- 2716
Anna Osello, Matteo Del Giudice, Daniela De Luca, Francesca Maria Ugliotti
Digital Twin. Experimenting drawings (di-SEGNI) between science and technology in teaching
- 2724
Alessandra Pagliano, Annalisa Pecora
An immersive experience for the room with agrestic paintings in Carditello (CE)
- 2734
Maurizio Peticarini, Alessandro Basso
Visualità digitale applicata a metodologie di rilievo integrato. Sinergie collaborative tra sperimentazione e tecnologia
Digital Visualization applied to integrated survey methodologies. Collaborative synergies between experimentation and technology
- 2751
Giorgia Potestà, Vincenzo Gelsomino
Archeologia vista da Drone. Il teatro greco-romano di Locri Epizefiri
Archeology seen by Drone. The Greco-Roman theater of Locri Epizefiri
- 2771
Paola Puma, Lorenzo Cecchi, Chiara Nepi, Giuseppe Nicastro
Virtual Heritage e musei scientifici: il progetto "Beccari in 3D" per le Collezioni Botaniche del Museo di Storia Naturale dell'Università di Firenze
Virtual Heritage and scientific museums. The project "Beccari in 3D" for the Botanical Collections of the Natural History Museum of the University of Florence
- 2789
Fabiana Raco, Marcello Balzani, Fabio Planu, Nicola Tasselli
Modellazione semantica HBIM per la rappresentazione digitale dell'intervento sul patrimonio esistente
HBIM semantic modelling for the digital imaging of interventions on existing heritage
- 2805
Gerardo Castro Reyes, Jesús Esquinas-Dessy
Un lenguaje grafico para comprender y simular la intangibilidad de paisajes verdes urbanos
A graphic language to understand and simulate the intangibility of urban green landscapes
- 2819
Andrea Rolando, Alessandro Scandiffio
Thematic mapping for the definition of territorial development strategies in the Province of Biella
- 2827
Gabriele Rossi, Valentina Castagnolo, Anna Christiana Maiorano
Dal mare alla terra: un nuovo punto di vista sui fari pugliesi
From sea to land: a new viewpoint on Apulian lighthouses
- 2845
Antonella Salucci, Caterina Santoro, Lida Elisa Vlami
Mappare la cultura Fab Lab. Processi e principi per il futuro della Città, dell'Architettura e del Design
Surveying the Fab Lab Culture. Processes and purposes for the future of the City, the Architecture and the Design
- 2861
Roberta Spallone, Chiara Teolato, Fabrizio Natta, Valerio Palma
Ricostruzione virtuale, VR e AR per la visualizzazione dell'aula provvisoria del Parlamento italiano
Virtual reconstruction, VR and AR to visualise the temporary chamber of the Italian Parliament
- 2881
Andrea Tomalini, Jacopo Bono
Nuove iconografie per la rappresentazione del patrimonio su Instagram
New iconographies for the representation of Instagram asset
- 2895
Ruggero Torti
Immagine ed emozione
Image and emotion
- 2907
Francesco Trimboli
Il segno come espressione archetipica dell'innovazione tecnologica
The sign as an archetypal expression of technological innovation
- 2925
Francesca Maria Ugliotti, Farzane Shahriari
Computational BIM design approach supporting Spatial Analysis: the case of healthcare facilities
- 2937
Graziano Mario Valenti, Alessandro Martinelli
Sulla qualità geometrica del modello di rilievo
On the geometric quality of the survey model
- 2953
Marco Vedoà
Comparing Top-Down and Bottom-Up Approaches. Maps of Cultural Landscape Digitisation Processes
- 2964
Gianluca Emilio Ennio Vita
Labirinto Software, complessità e contraddizioni nel disegno digitale per l'architettura
Software labyrinth, complexity and contradictions in digital design for architecture
- 2980
Andrea Zerbi, Sandra Mikolajewska
Tecniche integrate di rilievo fotogrammetrico e TLS per la documentazione di architetture dipinte
Integrated techniques of photogrammetric survey and TLS for the documentation of frescoed architectures
- 2996
Marta Zerbini
Il convento di San Francesco a Pitigliano: la chiesa che entra nel museo
The convent of San Francesco in Pitigliano: the church enters into the museum
- 3016
Ornella Zerlenga
Il suono della luce. Nuove narrazioni per il campanile di Santa Chiara a Napoli
The sound of light. New narrations for the bell tower of Santa Chiara in Naples



Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria

Fabrizio Gay

Abstract

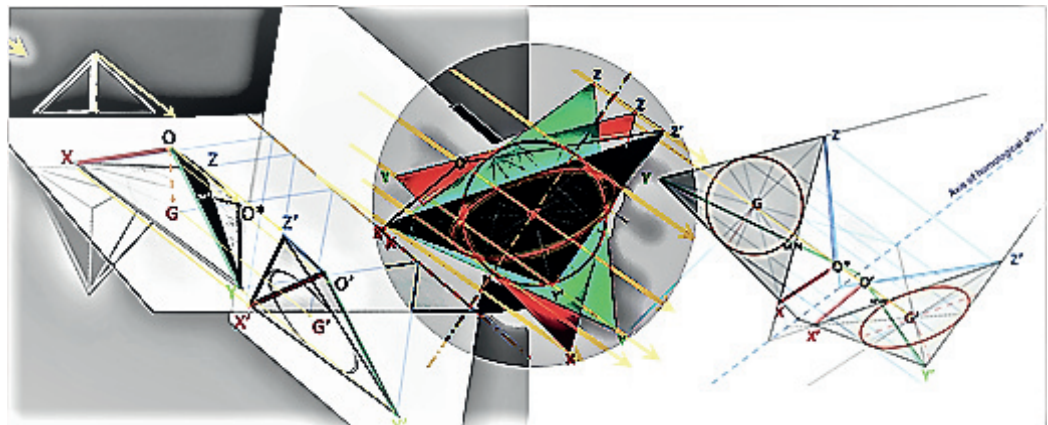
Le dimostrazioni del teorema di Pohlke hanno raggiunto un'elegante semplicità formulata in termini di algebra lineare e vettoriale [Manfrin 2018] divenendo utili strumenti per la modellazione e la trasformazione digitale delle immagini. Invece le dimostrazioni grafiche del teorema sono scomparse negli odierni manuali didattici, anche se quel teorema resta uno strumento essenziale dell'ortografia immaginativa praticata col disegno. Qui, partendo da considerazioni psicologiche sulla evidenza dimostrativa in termini visivi, proponiamo una nuova dimostrazione del teorema per via proiettiva e grafica basata solo su due lemmi: 1) l'unicità dell'*inellisse di Steiner* per ogni triangolo e 2) l'esistenza di due infinite di affinità omologiche piane con centro nella rilevata direzione di proiezione che trasformano un qualsiasi triangolo in equilatero. Ciò consente di svolgere la dimostrazione graficamente ed elementarmente, in doppia proiezione ortogonale.

Parole chiave

Teorema di Pohlke, assonometria, dimostrazioni grafiche, visualizzazioni geometriche

Topic

Comprendere



Nuova dimostrazione del teorema di Pohlke basata sull'unicità in un triangolo dell'*inellisse di Steiner*. Grafico dell'autore.

Misurare l'evidenza

“Avendogli una volta dichiarato di non vedere la verità di un'affermazione, che egli [Federigo Enriques] riteneva evidente, ma che invano avevamo tentato di dimostrare logicamente, egli si fermò di botto (eravamo nel corso di una delle abituali passeggiate) e, invece di tentare un'ultima dimostrazione, roteò il suo bastone appuntandolo sopra un cagnolino sul davanzale di una finestra, dicendomi: non vede? Per me è come se mi dicesse che non vede quel cagnolino!” [Brigaglia, Ciliberto 1998 p. 247]. Lo spettacolo fenomenico dell'ombra solare portata su un piano dai tre spigoli afferenti al vertice di un cubo – o dai tre raggi triortogonali di una sfera – è trascritto nel celebre teorema che Karl Wilhelm Pohlke formulava nel 1853: tre qualsiasi segmenti del piano $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (con un estremo O' in comune), purché non siano tutti e tre allineati e non più di uno sia nullo, possono sempre significare l'immagine per proiezione parallela di tre segmenti OX , OY , OZ nello spazio tra loro congruenti e triortogonali nel loro punto comune O .

Non elencheremo le diverse dimostrazioni della congettura di Pohlke, essendo storia ripercorsa da tanti saggi in più di un secolo e mezzo [Cunningham 1868; Emch 1918; Loria 1921; Bertan 1994; Candito 2003; Sklenáriková, Pémová 2007; De Carlo 2012]. Quella bibliografia arriva fino a oggi perché quel bel teorema induce almeno due aspettative: 1°) che le sue diverse dimostrazioni “dicano la stessa cosa” inter-traducendosi tra loro; 2°) che all'elementare spettacolo fenomenico che lo esemplifica consegua una sua dimostrazione altrettanto semplice ed evidente.

Le dimostrazioni del teorema differiscono tra loro per i presupposti assunti. Anche limitandoci a quelle sintetiche, ciascuna si focalizza su aspetti e lemmi diversi richiedendo diversi strumenti concettuali e risultando più o meno agevole delle altre alla verifica grafica con mezzi analogici o digitali. È noto che lo stesso Pohlke non pubblicò una dimostrazione del suo teorema [Pohlke 1860: § 113], pur avendola subito abbozzata; egli, nell'ultima edizione della sua *Darstellende Geometrie* (1876), preferì pubblicare quella che formulò sedici anni prima un suo studente allora diciannovenne – Herman Schwarz – ritenendola più “elementare” della sua. L'elementarità di una proposizione geometrica è la sua capacità – in quanto argomentazione sillogistica – di poter addurre il minor numero di lemmi intuitivi anche nelle loro reciproche connessioni. L'economia argomentativa è misurabile col calcolo logico, invece la “evidenza” è questione di “geometria e fisica ingenua” [Bozzi 1996] che si può misurare con la psicologia del ragionamento sensibile. Il “sapere vedere” è un vissuto percettivo, immaginativo e raffigurativo – un pattern cognitivo di natura ottica (proiettiva) e aptica (metrica). È un'attitudine che la dialettica classica ha cercato di disciplinare, come Platone esemplificava nel dialogo col povero schiavo di *Menone* condotto a trovare e dimostrare la misura del lato del quadrato di area doppia di un quadrato dato che, all'occorrenza, gli viene servito già diviso dalle sue diagonali in quattro spicchi pronti da ribaltare intorno ai lati per raddoppiare l'area. Con la tesi platonica del *Menone*, forse, concorderebbe anche il grande geometra Federigo Enriques, il quale, tuttavia, non credo accettasse le conclusioni che Platone traeva nel *Teeteto*, dove nega che la ragione geometrica e discorsiva sia una verità epistemica conoscibile attraverso la sensazione [*aistesis*]. All'opposto, Enriques sosteneva che la geometria ha (kantianamente?) a che fare con l'*aistesis*: fornisce i modelli interocettivi (astratti) del nostro spazio propriocettivo ed estero-cettivo, precisando che “I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base i) della teoria del continuo (*Analysis situs*), ii) della Geometria metrica e iii) della [*geometria*] proiettiva, si possono riattaccare nella psicogenesi, a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente i) alle generali sensazioni tattili-muscolari, ii) a quelle del tatto speciale [*la mano e il piede*] e iii) della vista. Questo risultato ci guida ad una spiegazione psicologica dei postulati della Geometria, e alla sua volta ne riceve conferma.” [Enriques 1906, p. 378].

Pohlke/Schwarz: due scene diverse dello stesso teorema

1) È molto facile mostrare cos'è un'assonometria obliqua; basta indicare le innumerevoli fattezze che possono assumere sul piano le ombre solari di tre bastoncini della stessa lunghezza e vincolati tri-ortogonalmente a un loro estremo comune, come se fossero i tre spigoli uscenti da un vertice di un cubo. 2) Altrettanto evidente è vedere nell'ombra solare di una sagoma piana l'immagine che le corrisponde puntualmente in una prospettiva affine che ha

centro nel Sole e asse nella retta comune tra il piano dell'ombra e quello della sagoma opaca che l'ha gettata. L'ombra solare dei tre spigoli del cubo e quella della sagoma piana sono spettacoli "elementari" perché li possiamo riprodurre praticamente, immaginare facilmente e, immaginandoli, ci esemplificano fenomenicamente proprietà essenziali (elementari) dello spazio proiettivo (2) che fondano un metodo di disegno (1). Ma, esemplificare ("mostrare") non è ancora "dimostrare" e predire (calcolare) graficamente la direzione di proiezione in relazione alla giacitura del piano della figura data.

In questo compito Polke e Schwarz ebbero attitudini immaginative diverse. Forse perché formatosi come pittore e tecnico, Pohlke si avvaleva di una spiccata capacità icastica e stereotomica; invece, il suo giovane allievo Schwarz esprime ben altre doti di astrazione che lo portarono a notevoli risultati nei più svariati campi matematici. Così, Pohlke formulò la dimostrazione della sua congettura in modo iconico, secondo l'evidenza fenomenica dell'ombra solare portata di una sfera (Fig. 01). Supponendo l'esistenza di una sfera di centro O (proiettato in O') si ammette che abbia tre raggi triortogonali (OX , OY e OZ) che proiettano le loro ombre nella direzione OO' sul piano negli omonimi tre segmenti $O'X'$, $O'Y'$ e $O'Z'$ dati sul piano. Allora i tre segmenti nel piano si possono vedere come i semidiametri coniugati a due a due di tre ellissi delle quali si possono ricavare facilmente gli assi. Tali tre ellissi non sarebbero che le ombre proiettate dalla direzione OO' sul piano dato dei tre cerchi massimi della sfera tra loro triortogonali.

Costruendo sul medesimo piano della figura data una quarta ellisse tritangente alle prime tre [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas et al. 2016], questa non sarebbe altro che la curva di contorno apparente (o il contorno d'ombra portata) della supposta sfera proiettata dalla direzione OO' (quella del "Sole"). La dimostrazione si può così ridurre a un problema pratico e grafico (stereotomico): data l'ombra portata di una sfera su un piano orizzontale, determinare l'inclinazione OO' del Sole che la proietta in rapporto alla giacitura del piano della figura data. L'estensione del raggio delle possibili sfere che proiettano quell'ombra è – contrariamente a quanto afferma Loria – indicata dall'asse "minore" dell'ellisse contorno d'ombra portata; l'asse maggiore di quell'ellisse è, semmai, il cateto del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il raggio di sole che passa per la sua apside.

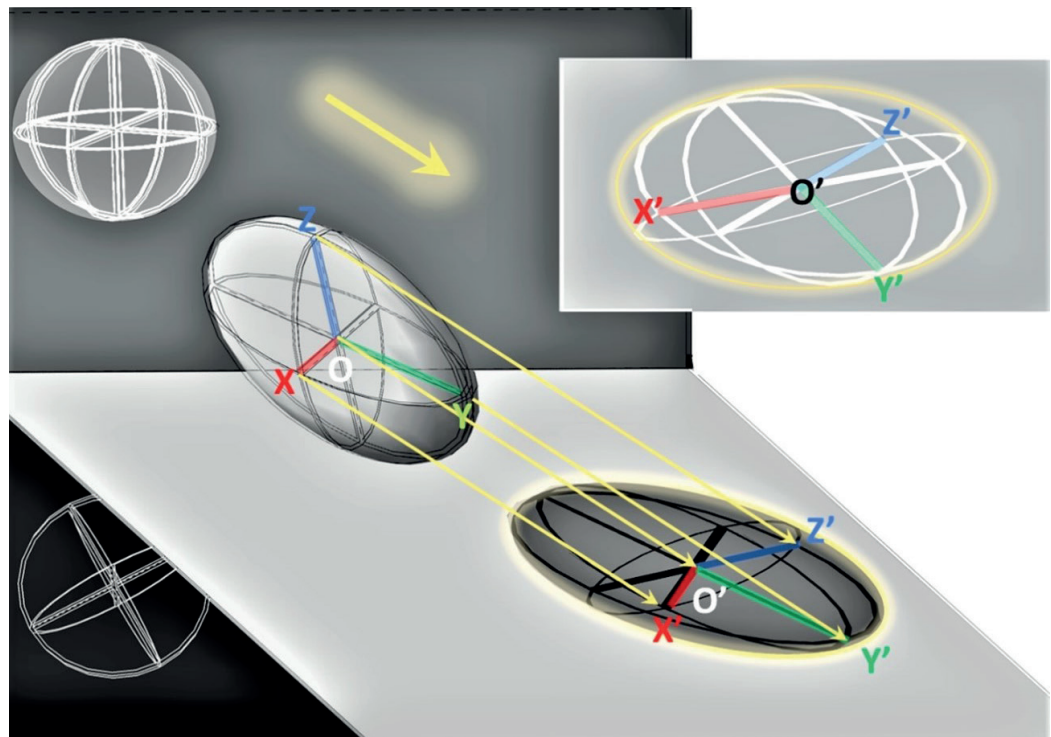


Fig. 01. Schema che visualizza la dimostrazione "classica" del teorema di Pohlke. Cfr. [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas, Lefkaditis, Markatis 2016]. Grafico dell'autore.

Tutt'altra visione (più astratta e generalizzante) ci porge la scena di Schwarz che – ragionando come Eulero –, prima di considerare i tre segmenti del piano $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, vede (Fig. 02) quello che oggi chiameremmo il “quadrilatero completo” $X'Y'Z'O'$, cioè la figura composta da sei rette: i quattro lati $X'Y'$, $Y'Z'$, $Z'O'$, $O'X'$ e le due diagonali $Z'X'$ e $O'Y'$. A questo punto basta ipotizzare che il quadrilatero completo $X'Y'Z'O'$ sia l'esito della proiezione parallela sul piano di un generico tetraedro obiettivo $XYZO$, cioè che ciascuna delle sei rette del quadrilatero sia immagine di uno spigolo di quel tetraedro. Ciò esclude solo il caso in

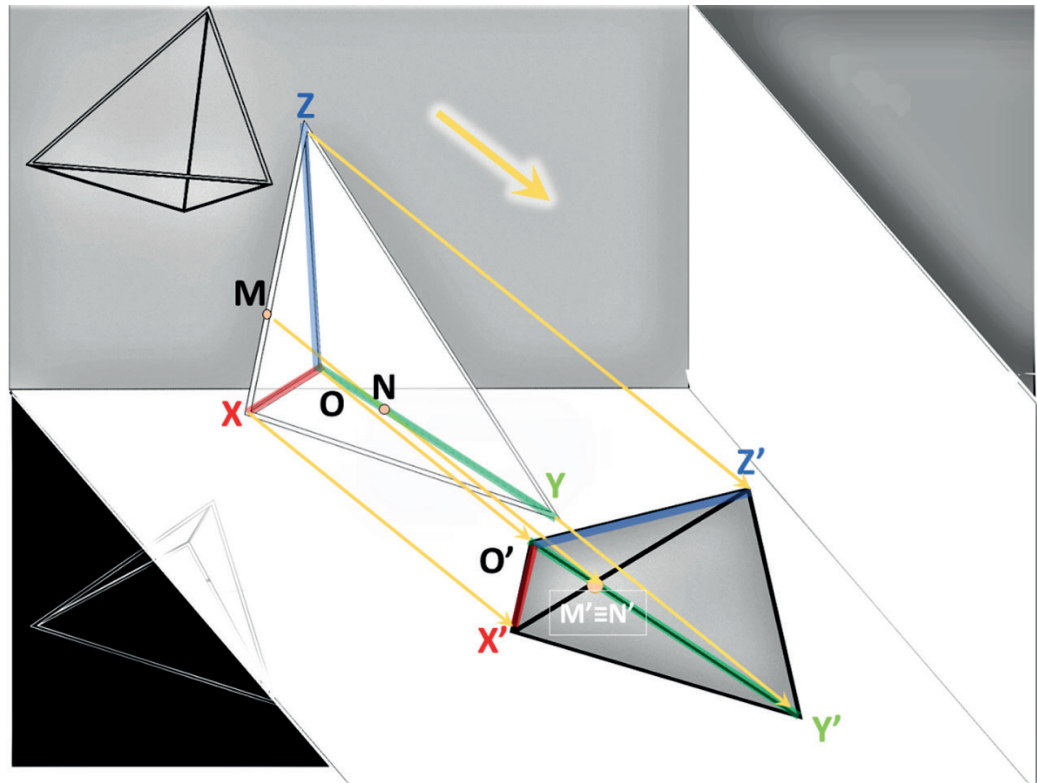


Fig. 02. - Schema che visualizza i lemmi presupposti della dimostrazione di Schwarz del teorema di Pohlke. Grafico dell'autore.

cui tutti e quattro i vertici siano collineari; ogni altra configurazione è senz'altro la proiezione parallela sul piano di un tetraedro, in forza del teorema di L'huilier sulla sezione piana dei poliedri e di quello di Desargues tradotto [Poncelet 1865, pp 362-3] in termini di due tetraedri omologici, uno dei quali degenera in quadrilatero completo piano.

Qualunque sia questo tetraedro supposto obiettivo, resta vero il significato proiettivo del quinto punto della figura piana: quello in cui si intersecano le diagonali $Z'X'$ e $O'Y'$. Dovremmo denominarlo $M'≡N'$ perché non può che essere l'immagine piana di due punti distinti del supposto tetraedro obiettivo: se N è immagine di un punto dello spigolo OY , allora M è quella di un punto dello spigolo XZ . Ma, se è indubbio che la retta MN individua la direzione della proiezione parallela, qual è tra quelle della stella di rette con centro in $M'≡N'$?

Dato che – realizzando una trasformazione proiettiva in “omologia affine” dello spazio – la proiezione parallela conserva gli elementi (punti e rette) impropri (direzioni e giaciture) e i rapporti semplici tra terne di elementi di forme di prima specie (punteggiate e fasci), sono necessariamente uguali i rapporti semplici $(X'Z'M') = (XZM)$ e $(Y'O'N') = (YON)$.

Da questo punto in poi, imponendo l'ipotesi che gli spigoli del tetraedro obiettivo afferenti in O siano triortogonali, il ragionamento può essere concluso in svariati modi, come ha fatto una diramata genealogia di dimostrazioni riportate in manuali ed eserciziari di geometria descrittiva del secolo scorso, per esempio: [Loria 1925, pp. 323-28; Dörrie 1965, pp 303-6; Campedelli 1972, pp. 28-31; Gay, 2001 pp. 42-3].

Ma queste dimostrazioni non si prestano immediatamente a una realizzazione grafica, sebbene si possa risalire elementarmente dalla configurazione del quadrilatero alle effettive possibili giaciture del triedro obiettivo $OXYZ$ attraverso un procedimento grafico che dimostra (fig. 03) come 1°) la richiesta direzione di proiezione OO' misuri un angolo zenitale " δ " e azimutale " α " rispetto al piano della figura data $O'X'Y'Z'$ e 2°) che l'angolo diedro tra la giacitura del piano della figura data $O'X'Y'Z'$ e la giacitura del piano obiettivo XYZ è pari a " β ". Per spiegare agevolmente questo risultato attraverso una semplice procedura grafica ci serviamo di una terza scena del teorema che sussuma le due precedenti.

Una terza scena del teorema

Jakob Steiner – il grande geometra svizzero corrispondente epistolare di Pohlke – aveva così riformulato in forma interrogativa l'enunciato della congettura dell'amico: "Se i vertici A, B, C, D di una piramide a base triangolare equilatera e con angoli retti all'apice sono proiettati in qualsiasi direzione su un qualsiasi piano, allora la domanda è: quale relazione ha luogo tra le distanze reciproche delle proiezioni A', B', C', D' ?" [Steiner 1858, p. 377]

Immaginiamo (Fig. 04) l'ombra solare di un tetraedro $OXYZ$ trirettangolo al vertice O e con base XYZ equilatera su un piano che ci conviene immaginare (data la categoria ingenua di "piramide") come "orizzontale", piano in cui l'ombra dell'apice O cade in O^* che può trovarsi in qualunque luogo del piano XYZ a seconda della direzione di proiezione. Le ombre O^*X, O^*Y e O^*Z non sarebbero altro che le tre rette dette "ceviane" dell'equilatero XYZ . Ecco, dunque, una scena familiare: quella – inaugurale della geometria stessa – in cui Talete umilia il Faraone calcolando attraverso l'ombra l'altezza incognita della piramide. Per noi il compito è più semplice: sapendo che la proiezione normale di O su XYZ cade nel baricentro G di XYZ , e la direzione GO^* testimonia quella delle tracce orizzontali della giacitura verticale che contiene le rette proiettanti dalla direzione OO^* . Per trovare l'altezza OG basta ribaltare sul piano orizzontale una qualunque sezione normale che passi per uno spigolo della piramide e che, di conseguenza, incontra O come vertice di un angolo retto, ovvero punto del semicircolo che ha diametro nella base della sezione (fig. 04).

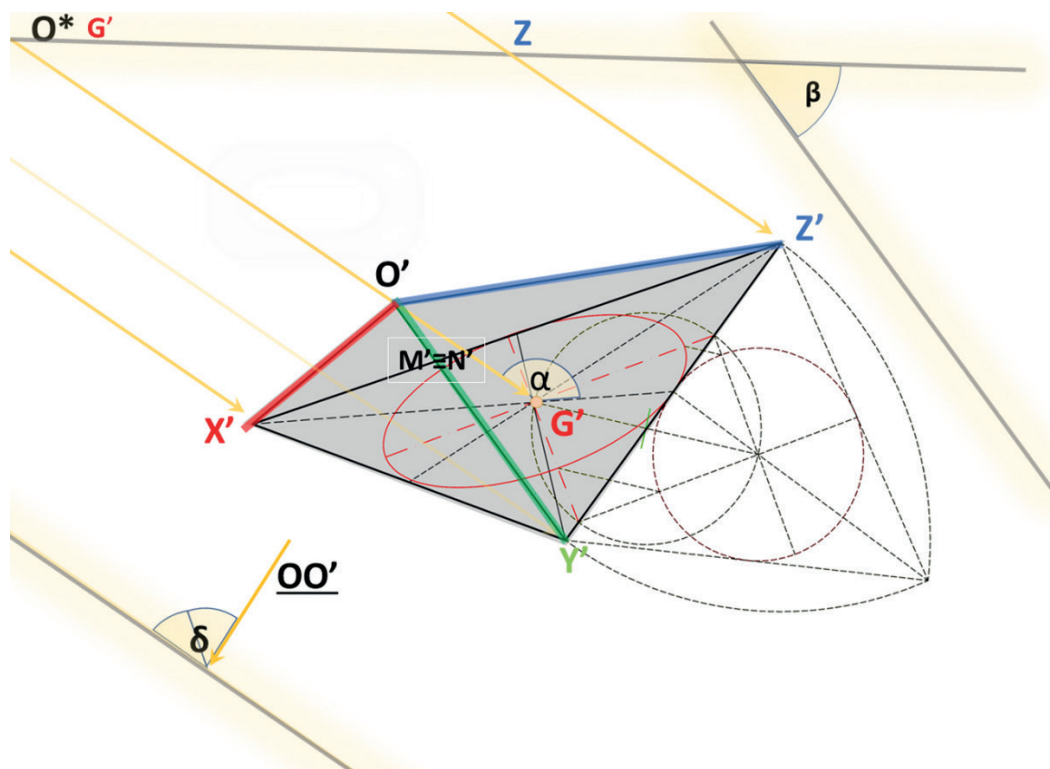


Fig. 03: Risultati della dimostrazione grafica del teorema di Pohlke nello specifico caso su addotto e secondo lo schema di Swartz: " β " = angolo diedro tra $X'Y'Z'$ e XYZ ; " α " = angolo azimutale nella giacitura $X'Y'Z'$ della direzione di proiezione OO' ; " δ " = angolo zenitale nella giacitura ortogonale a $X'Y'Z'$ della direzione di proiezione OO' . Grafico dell'autore.

Trovata l'altezza OG , è conseguente poter disegnare in vera forma e misura il segmento OO^* che testimonia la direzione di proiezione. Immaginiamo ora che il piano XYZ divenga trasparente lasciando proseguire i raggi di Sole nella direzione OO^* verso un altro piano, comunque posto, sul quale proiettano l'ombra che corrisponde alla configurazione del dato quadrilatero $O'X'Y'Z'$ da cui partiamo. Come si vede (fig. 05), tra i due quadrilateri piani O^*XYZ e $O'X'Y'Z'$ intercorre sempre una prospettività affine che ha centro nella direzione $O'O$ e asse (proprio o improprio) nella retta comune ai due piani prospettivi.

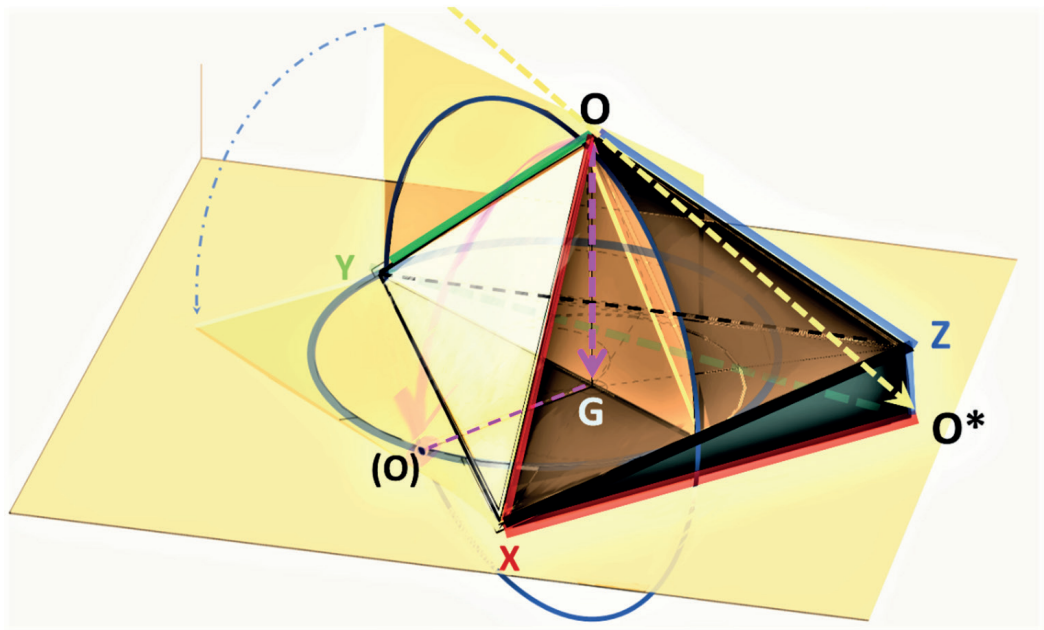


Fig. 04. Determinazione dell'altezza e della direzione di proiezione dell'ombra nel caso di un tetraedro a base equilatera e tri-ortogonale in O . Grafico dell'autore.

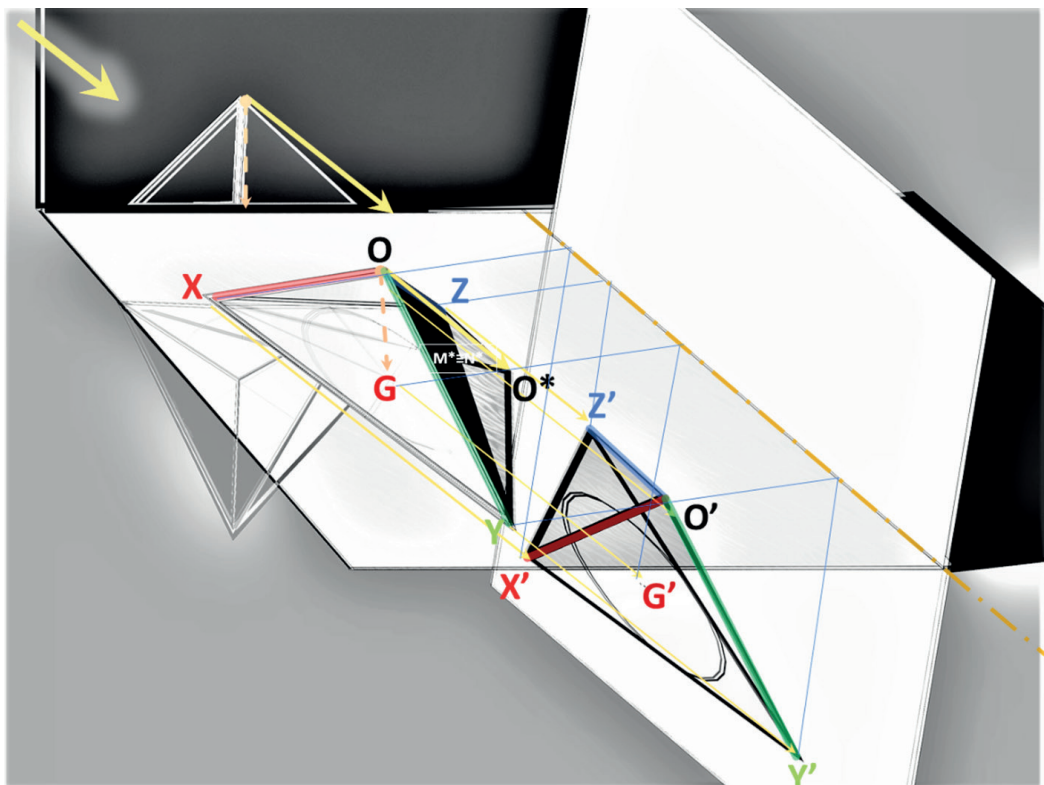


Fig. 05. Schema che visualizza i presupposti della nostra dimostrazione del teorema di Pohlke. Grafico dell'autore.

In particolare, la proiezione parallela, conservando i rapporti semplici, a fortiori, trasforma i punti medi e i baricentri dei trilateri in O^*XYZ nei punti medi e nei baricentri dei trilateri di $O'X'Y'Z'$.

Potendo dimostrare solo sulla data figura finale di quest'affinità omologica – rispondendo a Steiner – dimostriamo che è sempre determinata l'affinità omologica che ha centro improprio nella direzione OO' e che trasforma il triangolo $X'Y'Z'$ in un triangolo equilatero XYZ .

Lemma 1

Osserviamo che nella richiesta affinità è proprio l'*inellisse di Steiner* – cioè l'ellisse iscritta nel triangolo $X'Y'Z'$ a lui tri-tangente nei punti medi dei lati (ha centro nel baricentro G' ed è omotetica in G' all'ex-ellisse) – quella che si deve trasformare nel circolo di centro G iscritto nel triangolo equilatero XYZ .

È ora dimostrato [Kalman 2008] che quell'inellisse è unica e univoca per ogni triangolo. Ciò consente, dato un qualunque triangolo $X'Y'Z'$, di costruire la sua *inellisse di Steiner* come trasformazione affine di un triangolo equilatero di lato coincidente con qualunque dei tre lati del dato $X'Y'Z'$ e baricentro G^* .

Graficamente, si tratta solo di tracciare l'affinità che ha asse su un qualunque lato di $X'Y'Z'$ e centro nella direzione $G'G^*$ trovando (Fig. 06) quale coppia di diametri ortogonali del circolo in G^* si trasforma negli assi dell'inellisse di centro G' .

Lemma 2

Esistono infinite affinità omologiche nel piano $X'Y'Z'$ che hanno tutte centro improprio nella direzione $G'O'$ e che trasformano il trilatero $X'Y'Z'$ nel suo piano in due infinite schiere equipollenti di trilateri equilateri XYZ una simmetrica all'altra rispetto alla giacitura normale a $G'O'$ (figg. 07, 08).

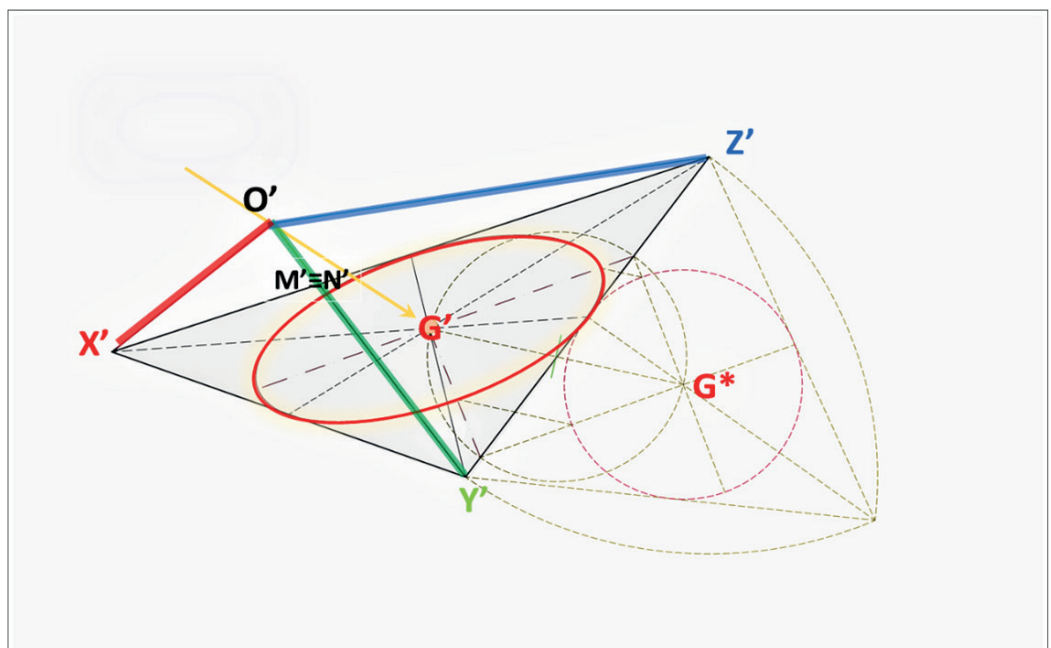


Fig. 06. Determinazione dell'inellisse di Steiner in $X'Y'Z'$ per affinità omologica di centro nella direzione $G'G^*$. Grafico dell'autore.

Dimostrazione

Disegnando una qualunque delle suddette affinità omologiche (fig. 09) si interpreta (fig. 10) l'asse dell'affinità come retta comune dei piani $X'Y'Z'$ e XYZ . Leggendo XYZ come pianta equilatera del supposto tetraedro trirettangolo in O se ne disegni la seconda proiezione ortogonale nella direzione normale all'asse dell'affinità che, essendo retta proiettante di questo "prospetto", vi risulterà rappresentato da un punto; mentre l'altezza GO della piramide risulterà in vera forma e misura, e, con essa, è rappresentata la direzione OO^* che proietta $OXYZ$ in $O'X'Y'Z'$.

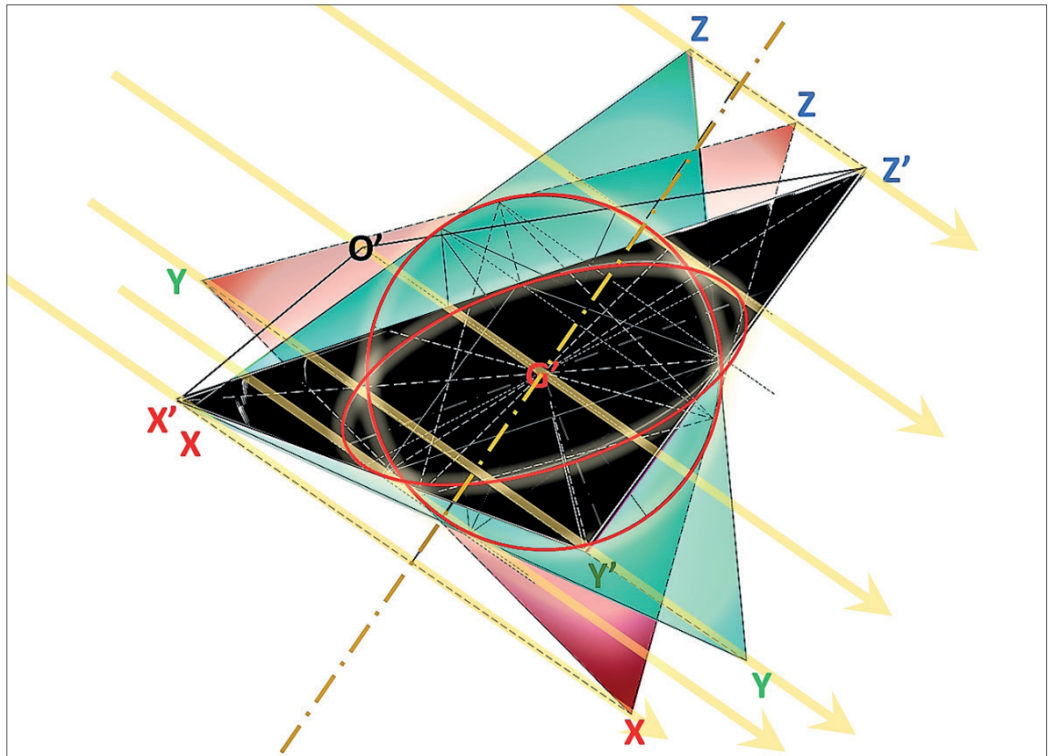


Fig. 07. Affinità di centro nella direzione $O'G$ che trasforma l'inesse di Steiner di $X'Y'Z'$ nel circolo iscritto in triangoli equilateri simmetrici XYZ corrispondenti a $X'Y'Z'$ nella medesima affinità. Ciò è dovuto al fatto che le schiere di tetraedri che rispondono al teorema sono quattro: due simmetriche rispetto alla direzione OO' e due simmetriche nella direzione simmetrica di OO' rispetto al piano $X'Y'Z'$. Grafico dell'autore.

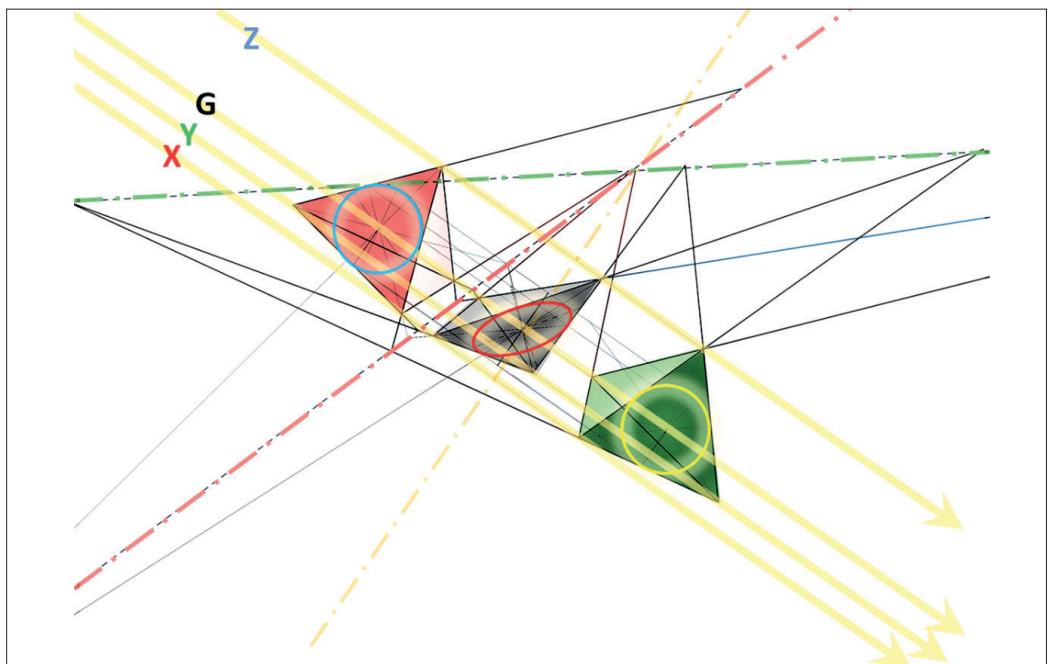


Fig. 08. Oltre ai tetraedri obiettivi equipollenti trirettangoli in O che si proiettano in $O'X'Y'Z'$ nella direzione OO' , soddisfano il teorema anche i loro simmetrici rispetto alla direzione OO' , quelli lungo la direzione simmetrica di OO' in rapporto al piano XYZ e i loro simmetrici. Grafico dell'autore.

Infine, si interpreti $X'Y'Z'$ come figura ribaltata in vera forma sul piano XYZ ; nel prospetto corrispondente si possono tracciare gli archi di circolo con centro nel punto prospettivo dell'asse e che sono quelli percorsi dal ribaltamento di $O'G'X'Y'Z'$ fino a raggiungere le corrispondenti rette nella direzione OO^* passanti per $XYZG$. Ciò restituisce l'angolo diedro tra $X'Y'Z'$ e XYZ , come se avessimo piegato il disegno dell'affinità lungo il suo asse fino a portare i punti delle due parti del foglio ad allinearsi lungo i corrispondenti piani di proiezione nella direzione OO^*O' ortogonali a XYZ .

Abbiamo – c.v.d. – disegnato uno tra le quattro infinità di tetraedri equipollenti che soddisfanno il teorema, giacché la soluzione vale anche per i simmetrici di $OXYZ$ rispetto alla direzione OO' e per i loro traslati nella direzione simmetrica di OO' in O' rispetto al piano $X'Y'Z'$.

Fig. 09. Costruzione una delle possibili affinità intercorrente tra $O'X'Y'Z'$ e O^*XYZ . Grafico dell'autore.

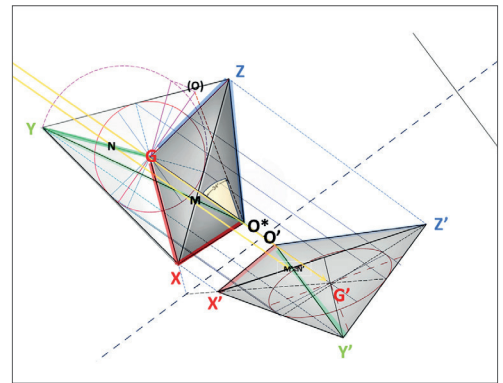
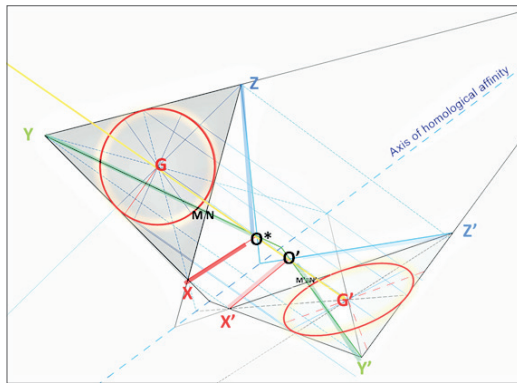


Fig. 10. Interpretazione della figura $XYZO^*$ come planimetria della piramide retta in G : determinazione del ribaltamento in vera forma dell'altezza OG e della direzione di proiezione OO^* rispetto alla giacitura XYZ . Grafico dell'autore.

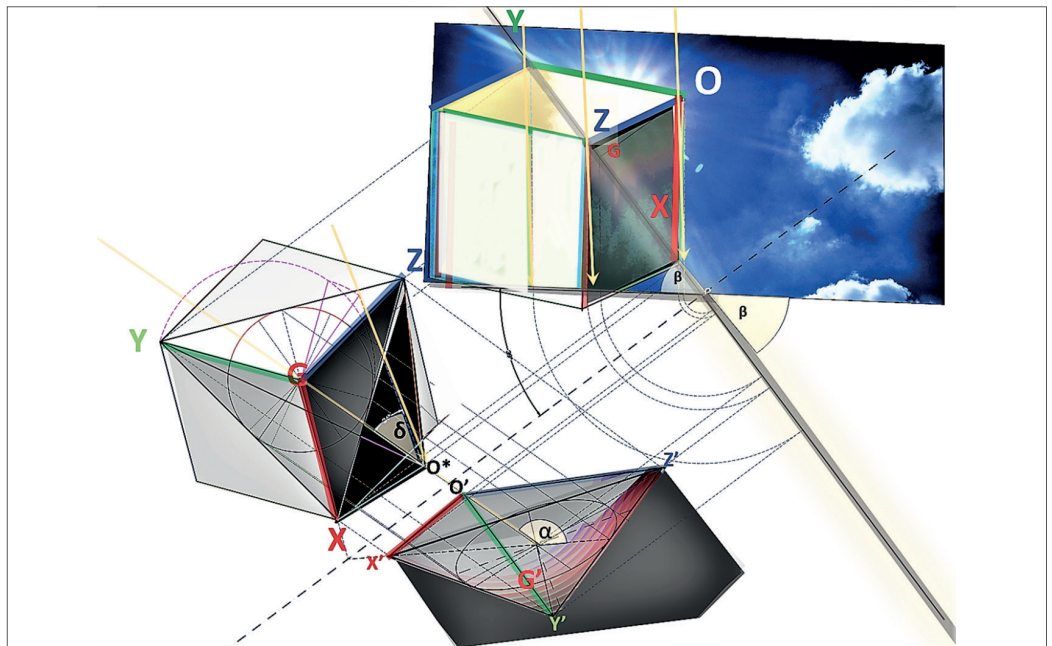


Fig. 11. Dimostrazione disegnata in doppia proiezione ortogonale della piramide $OXYZ$ e determinazione dell'angolo diedro tra i piani XYZ e $X'Y'Z'$ sul quale risulta descritta l'ombra portata. Grafico dell'autore.

Riferimenti bibliografici

- Bertan, F. (1994). Strumenti e metodi per il disegno. In Scolaril, M., Borghinil, M. (a cura di) *Teorie e metodi del disegno*. Milano: CittàStudi.
- Bozzi, P. (1998). *Fisica ingenua: studi di psicologia della percezione*. Milano: Garzanti.
- Brigaglia, A., Ciliberto, C. (1998). La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali. In Di Sieno, S., Guerraggio, A., Nastasi, P. (a cura di). *La matematica italiana dopo l'unità*. Milano: Marcos y Marcos.
- Campedelli, L. (1972). *Lezioni di geometria*. Vol. 2°. Parte prima. *I metodi di rappresentazione della geometria descrittiva*. Padova: Cedam.
- Candito, C. (2003). *Le proiezioni assonometriche: dalla prospettiva isometrica all'individuazione dei fondamenti del disegno assonometrico*. Firenze: Alinea editrice.
- Cunningham, A.W. (1868). *Notes on the history, methods, and technological importance of descriptive geometry*. Edinburgh: Edmonston and Douglas.
- De Carlo, L. (2012). La prospettiva parallela come metodo: una visione storica. In Migliari, R., Carlevaris, L., (a cura di) *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi Editore.
- Docci, M., Migliari, R. (1999). *Scienza della rappresentazione: fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*. Roma: Carocci.
- Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Toronto: Dover Publications.
- Emch, A. (1918). Proof of Pohlke's theorem and its generalizations by affinity. In *American Journal of Mathematics*, n. 40 (4) (1918), pp. 366–374.
- Enriques, F. (1906). *Problemi della scienza*. Bologna: Ditta N. Zanichelli.
- Gay, F. (2001). *Fondamenti geometrici del disegno*. Padova: Libreria il Progetto.
- Kalman, D. (2008). An Elementary Proof of Marden's Theorem. In *American Mathematical Monthly* 115, pp.330–338.
- Loria, G. (1921). *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.
- Loria, G. (1925). *Metodi di geometria descrittiva*. Milano: Hoepli.
- Manfrin, R. (2018). A proof of Pohlke's theorem with an analytic determination of the reference trihedron. In *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 22 (2018), n. 2, pp. 195-205.
- Pohlke, K. W. (1860). *Darstellende Geometrie : zunächst für den Gebrauch bei den Vorträgen an der Königlichen Bau-Akadmie und dem Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin*. Abth. I, Tafeln Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrien. Berlin: Gaertner.
- Pohlke, K. W. (1876). *Darstellende Geometrie*. Taf.2, Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrie. Berlin: Gaertner.
- Poncelet, J. V. (1865). *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Second part. Paris: Gauthier-Villars.
- Sklenarikova, Z., Pemova, M. (2007). The Pohlke–Schwarz theorem and its relevancy in the didactics of mathematics. In *Quaderni di Ricerca in Didattica* n.17. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo).
- Steiner, J. (1858). *Vermischte Sätze und Aufgaben*. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reimer.
- Toulias, L.T., Lefkaditis, G. E., Markatis, S. (2016). *The four ellipses problem*. In *International journal of geometry*. Vol. 5 (2016), No. 2, pp. 77-92.

Autore

Fabrizio Gay, Università IUAV di Venezia, Laboratorio di Teoria delle immagini, fabrizio@iuav.it

Per citare questo capitolo: Gay Fabrizio (2022). Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria/ Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry. In Battini C., Bistagnino E. (a cura di), *Dialoghi. Visioni e visualità. Testimoniare Comunicare Sperimentare. Atti del 43° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Dialogues. Visions and visuality. Witnessing Communicating Experimenting. Proceedings of the 43rd International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 2503-2522



Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry

Fabrizio Gay

Abstract

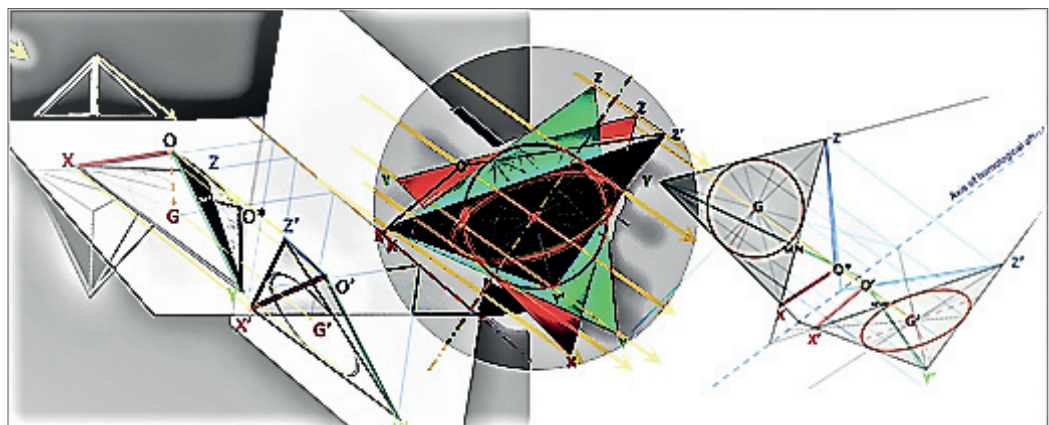
The proofs of Pohlke's theorem have reached an elegant simplicity formulated in terms of linear and vector algebra [Manfrin 2018] becoming useful tools for modelling and digital transformation of images. Instead, the graphical proofs of the theorem have disappeared in today's didactic manuals, even though that theorem remains an essential tool of imaginative orthography practiced through drawing. Here, starting from psychological considerations on the demonstrative evidence in visual terms, we propose a new proof of the theorem by projective and graphical way based only on two lemmas: 1) the uniqueness of Steiner's inellipse for each triangle and 2) the existence of two infinities of plane homological affinities with centre in the detected direction of projection that transform any triangle into an equilateral one. This allows the demonstration to be carried out graphically and elementarily, in double orthogonal projection.

Keywords

Pohlke's theorem, axonometry, graphic demonstration, geometric visualization

Topic

Understanding



New proof of Pohlke's theorem based on the uniqueness of Steiner's inellipse in a triangle. Graphic by the author.

Introduction

"Having once declared to him that he did not see the truth of a statement, which he [Federigo Enriques] believed to be evident, but which we had tried in vain to logically prove, he suddenly stopped (we were having one of the usual walks) and, instead of trying one last demonstration, he spun his cane pointing it to a little dog on a window sill, saying to me: can't you see? For me it's as if you were telling me that you don't see that little dog!" [Brigaglia, Ciliberto 1998 p. 247] (trad. of the author).

The phenomenal spectacle of the solar shadow brought on a plane by the three edges afferent to the vertex of a cube – or by the three tri-orthogonal rays of a sphere – is transcribed in the famous theorem that Karl Wilhelm Pohlke formulated in 1853: any three segments of the plane $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (with an extreme O' in common), as long as they are not all three aligned and no more than one is null, can always indicate the image by parallel projection of three segments OX , OY , OZ in the space, congruent and triorthogonal in their common point O .

We will not list the various proofs of Pohlke's conjecture, as history has been retraced by many essays over more than a century and a half [Cunningham 1868; Emch 1918; Loria 1921; Bertan 1996; Candito 2003; Sklenáriková, Pémová 2007; De Carlo 2012].

That bibliography continues up to the present day because that beautiful theorem induces at least two expectations: 1°) that its various proofs "say the same thing" by inter-translating each other; 2°) that an equally simple and evident demonstration follows from the elementary phenomenal spectacle that exemplifies it.

The proofs of the theorem differ from each other for the considered assumptions. Even limiting ourselves to the synthetic ones, each focuses on different aspects and terms, requiring different conceptual tools and turning out to be more or less easy than the others in the graphical proof with analog or digital means. It is known that Pohlke himself did not publish a proof of his theorem [Pohlke 1860: § 113], although he immediately sketched it out; in the latest edition of his *Darstellende Geometrie* (1876) he preferred to publish what a then nineteen-year-old student of his – Herman Schwarz – had formulated sixteen years before – considering it more "elementary" than his own.

The elementary nature of a geometric proposition is its ability – as a syllogistic argumentation – to adduce the least number of intuitive lemmas even in their mutual connections. Argumentative economics is measurable with logical calculation, whereas "evidence" is a matter of "naive geometry and physics" [Bozzi 1996] that can be measured with the psychology of sensible reasoning.

The "knowing how to see" is a perceptive, imaginative and representational experience – a cognitive pattern of an optical (projective) and haptic (metric) nature. It is an attitude that the classical dialectic has tried to discipline, as Plato exemplified in the dialogue with the poor slave of *Meno* led to find and demonstrate the measure of the side of the square having a double area of a given square given that, where appropriate, it is served already divided by its diagonals into four segments ready to flip around the sides to double the area. Perhaps the great geometer Federigo Enriques would also agree with the Platonic thesis of the *Meno*, who, however, in my opinion, wouldn't accept the conclusions that Plato drew in the *Theaetetus*, where he denies that geometric and discursive reason is an epistemic truth that can be known through sensation [*aistesis*].

On the contrary, Enriques argued that geometry has to do (in a Kantian way?) with *aistesis*: it provides the (*abstract*) interoceptive models of our proprioceptive and exteroceptive space, specifying that "The three groups of representations that are linked to the concepts underlying i) the theory of continuity (*Analysis situs*), ii) metric geometry and iii) projective [*geometry*], can be re-attached in psychogenesis to three groups of sensations: respectively i) to the general tactile-muscular sensations, ii) to those of the special sense of touch [the hand and the foot] and iii) of the sight. This result leads us to a psychological explanation of the postulates of geometry, and in turn receives confirmation!". [Enriques 1906, p. 378]. (Trad. of the author).

Pohlke/Schwarz: two different scenes of the same theorem

1) It is very easy to show what an oblique axonometry is; it is sufficient to indicate the innumerable configurations that the solar shadows of three sticks of the same length and tri-orthogonally constrained to one of their common ends can assume on the plane, as if they were the three edges coming out from a vertex of a cube.

2) It is equally evident to see in the solar shadow of a flat shape the image that corresponds punctually to it in an affine perspective that has its centre in the Sun and its axis in the common line between the plane of the shadow and that of the opaque shape that has cast it.

The solar shadow of the three edges of the cube and that of the flat shape are "elementary" spectacles because we can practically reproduce them, easily imagine them and, by imagining them, they phenomenally exemplify essential (elementary) properties of the projective space (2) that are at the basis of a drawing method (1). However, to exemplify ("show") is not yet "demonstrate" and graphically predict (calculate) the direction of projection in relation to the position of the plane of the given figure.

In this task Pohlke and Schwarz had different imaginative aptitudes. Perhaps, since he trained as a painter and technician, Pohlke made use of a marked figurative and stereotomic ability; conversely, his young pupil Schwarz expressed many other abstraction skills that led him to remarkable results in the most varied mathematical fields. Thus, Pohlke formulated the proof of his conjecture in an iconic way, according to the phenomenal evidence of the drop shadow produced by the Sun on a sphere (fig. 01). Assuming the existence of a sphere centred in O (projected in O') it is admitted that it has three triorthogonal rays (OX , OY and OZ) which project their shadows in the direction OO' on the plane in the homonymous three segments $O'X'$, $O'Y'$ and $O'Z'$ given on the plane. Then the three segments on the plane can be seen as the half-diameters, conjugated two by two, of three ellipses whose axes can be easily obtained. These three ellipses would be nothing more than the shadows projected from the direction OO' on the given plane of the three maximum circles of the sphere triorthogonal to each other. By constructing a fourth ellipse, tritangent to the first three on the same plane as the given figure [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas et al. 2016], this would be nothing more

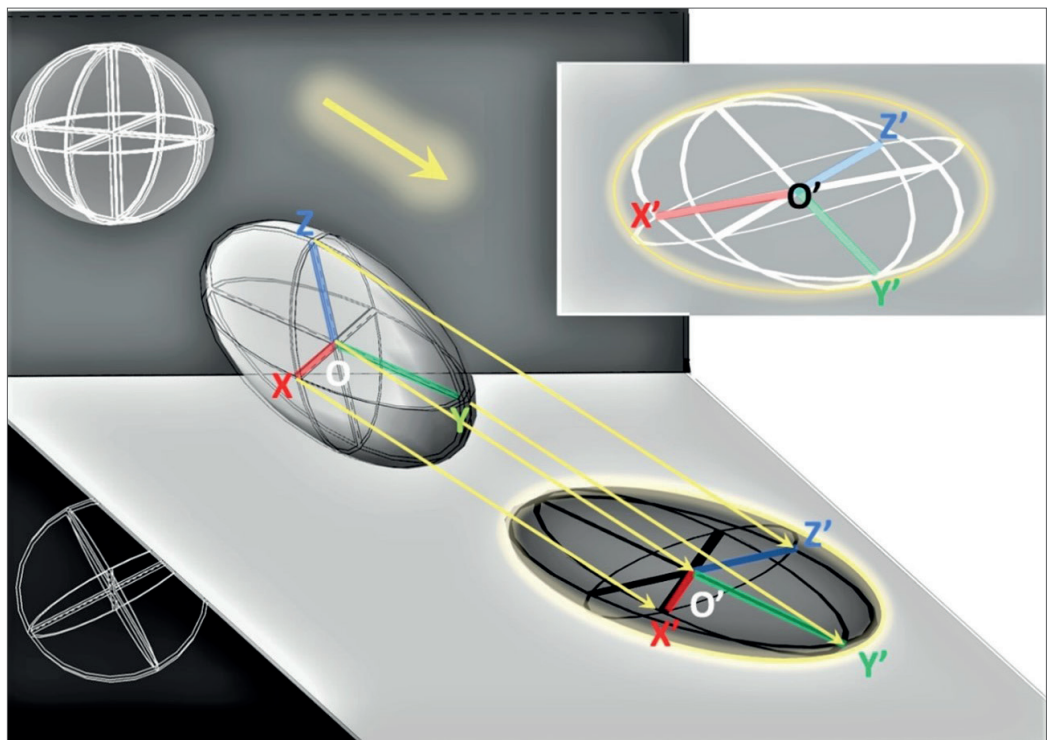


Fig. 01. Diagram showing the "classical" proof of Pohlke's theorem. Cf. [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas, Lefkaditis, Markatis 2016]. Graphic by the author.

than the apparent contour curve (or the drop shadow contour) of the supposed sphere projected from the OO' direction (the one of the "Sun"). The demonstration can thus be reduced to a practical and graphic (stereotomic) problem: given the shadow cast by a sphere on a horizontal plane, determine the inclination OO' of the Sun which projects it in relation to the position of the plane of the given figure. The extension of the radius of the possible spheres that cast that shadow is – contrary to what Loria claims – indicated by the "minor" axis of the ellipse that constitutes the contour of the shadow; the major axis of that ellipse is, if anything, the cathetus of the right triangle which has as its hypotenuse the ray of the sun that passes through its apsis.

A completely different vision (a more abstract and generalizing one) is offered to us by Schwarz's scene which – reasoning like Euler –, before considering the three segments of the $O'X', O'Y', O'Z'$ plane, sees (fig. 02) what today we would call the "complete quadrilateral" $X'Y'Z'O'$: that is the figure made up of six straight lines: the four sides $X'Y', Y'Z', Z'O', O'X'$ and the two diagonals $Z'X'$ and $O'Y'$. At this point it is sufficient to assume that the complete quadrilateral $X'Y'Z'O'$ is the result of the parallel projection on the plane of a generic objective tetrahedron $XYZO$, that is, that each of the six straight lines of the quadrilateral is an image of an edge of that tetrahedron.

This only excludes the case in which all four vertices are collinear; any other configuration is undoubtedly the parallel projection on the plane of a tetrahedron, by virtue of L'Huilier's theorem on the plane section of the polyhedra and that of Desargues translated [Poncelet 1865, pp 362-3] in terms of two homological tetrahedra one of which degenerates into a "complete quadrilateral plane". Whatever this supposed objective tetrahedron is, the projective meaning of the fifth point of the plane figure remains true: the one in which the diagonals $Z'X'$ and $O'Y'$ intersect. We should call it $M' \equiv N'$ because it can only be the plane image of two distinct points of the supposed objective tetrahedron: if N is the image of a point of the edge OY , then M is that of a point of the edge XZ . But, if there is no doubt that the line MN identifies the direction of the parallel projection, which one is it among those of the star of lines with centre in $M' \equiv N'$?

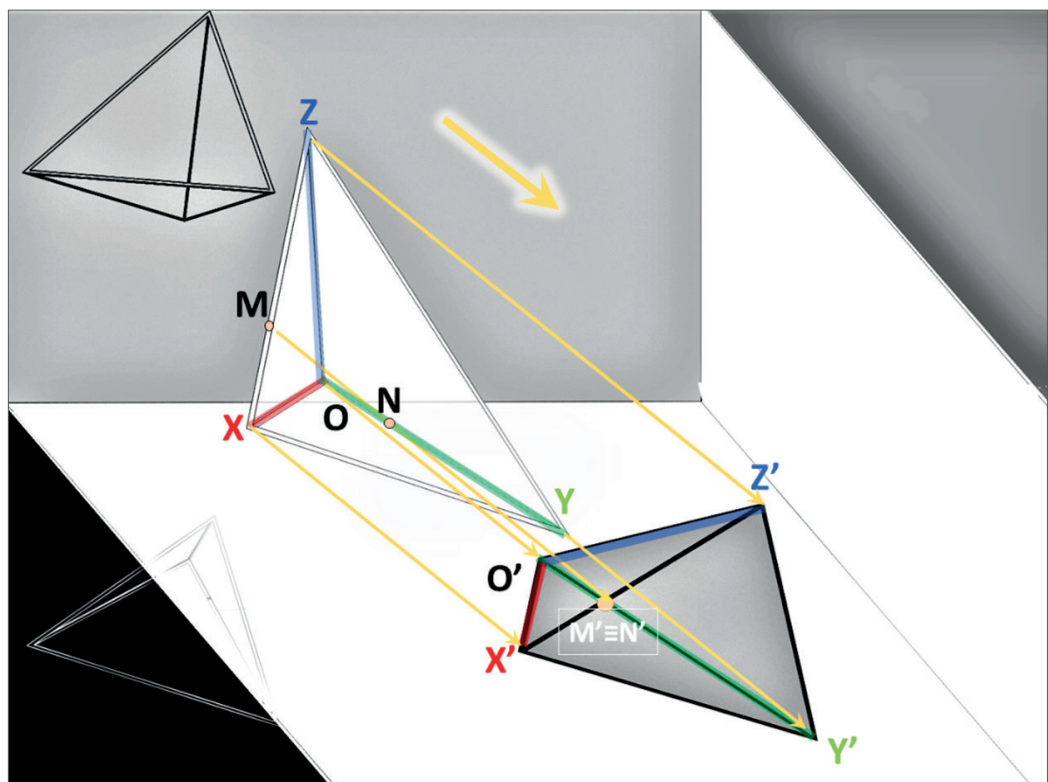


Fig. 02. Diagram showing the presupposed lemmas of Schwarz's proof of Pohlke's theorem. Graphic by the author.

Let's imagine (fig. 04) the solar shadow of a three-rectangle $OXYZ$ tetrahedron at the vertex O and with an equilateral XYZ base on a plane that we should imagine (given the naive category of "pyramid") as "horizontal", the plane in which the shadow of the apex O falls in O^* which can be found in any place of the XYZ plane depending on the direction of projection. The shadows O^*X , O^*Y and O^*Z would be none other than the three straight lines called "Cevian" of the equilateral XYZ . Here, then, is a familiar scene: the one – inaugural of geometry itself – in which Thales humiliates the Pharaoh by calculating the unknown height of the pyramid through the shadow. For us the task is simpler: knowing that the normal projection of O on XYZ falls in the centre of gravity G of XYZ , and the direction GO^* testifies, among the horizontal traces of the vertical position, the one that contains the straight lines projecting from the direction OO^* . To find the height OG it is sufficient to overturn on the horizontal plane any normal section that passes through an edge of the pyramid and that, consequently, meets O as the vertex of a right angle, that is a point of the semicircle that has its diameter at the base of the section (fig. 04). Once the OG height has been found, it is consequent to be able to draw the OO^* segment in true shape and measure, which testifies to the direction of projection. Now let's imagine that the XYZ plane becomes transparent letting the Sun's rays continue in the OO^* direction towards another plane, however placed, on which they project the shadow that corresponds to the configuration of the given quadrilateral $O'X'Y'Z'$ from which we start. As can be seen (fig. 05), between the two flat quadrilaterals O^*XYZ and $O'X'Y'Z'$ there is always an affine perspective which has its centre in the $O'O$ direction and axis (proper or improper) in the line that is common to the two prospective plans. In particular, the parallel projection, preserving the simple ratios, *a fortiori*, transforms the midpoints and barycentres of the trilaterals in O^*XYZ in the midpoints and barycentres of the trilaterals of $O'X'Y'Z'$. Being able to demonstrate only on the given final figure of this homological affinity – by answering Steiner – we show that the homological affinity which has an improper centre in the direction OO' and which transforms the triangle $X'Y'Z'$ into an equilateral triangle XYZ is always determined.

Lemma I

We observe that in the required affinity it is precisely Steiner's *inellipse* – that is, the ellipse inscribed in the triangle $X'Y'Z'$ tri-tangent to it at the midpoints of the sides (it has its centre in the centre of gravity G' and is homothetic in G' to the ex-ellipse) - the one that must be transformed into the circle with centre G inscribed in the equilateral triangle XYZ .

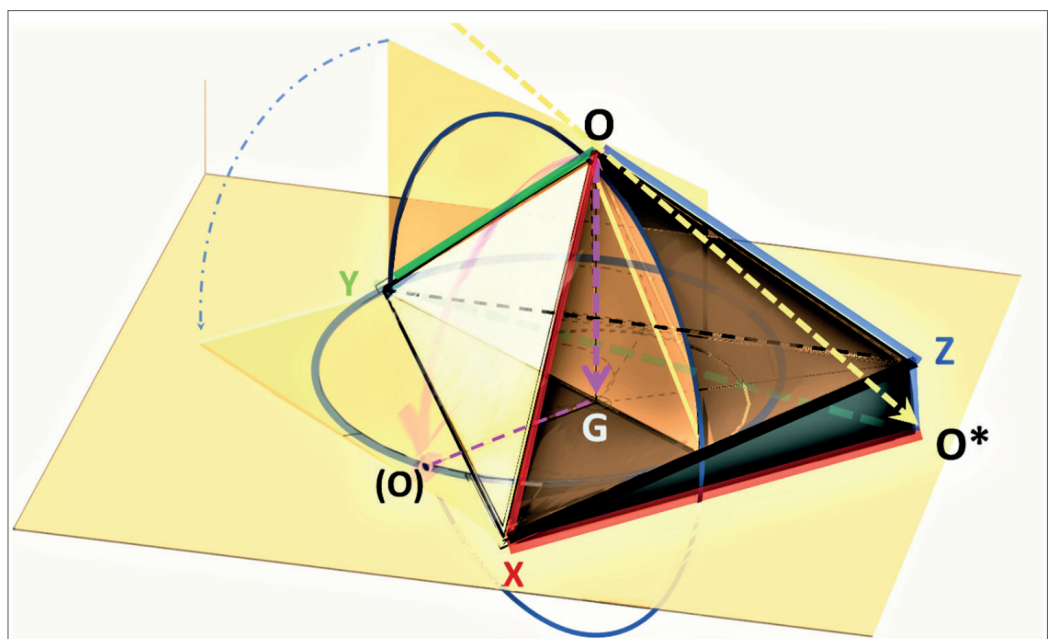


Fig. 04. Determination of the height and direction of projection of the shadow in the case of a tetrahedron with an equilateral and tri-orthogonal base in O . Graphic by the author.

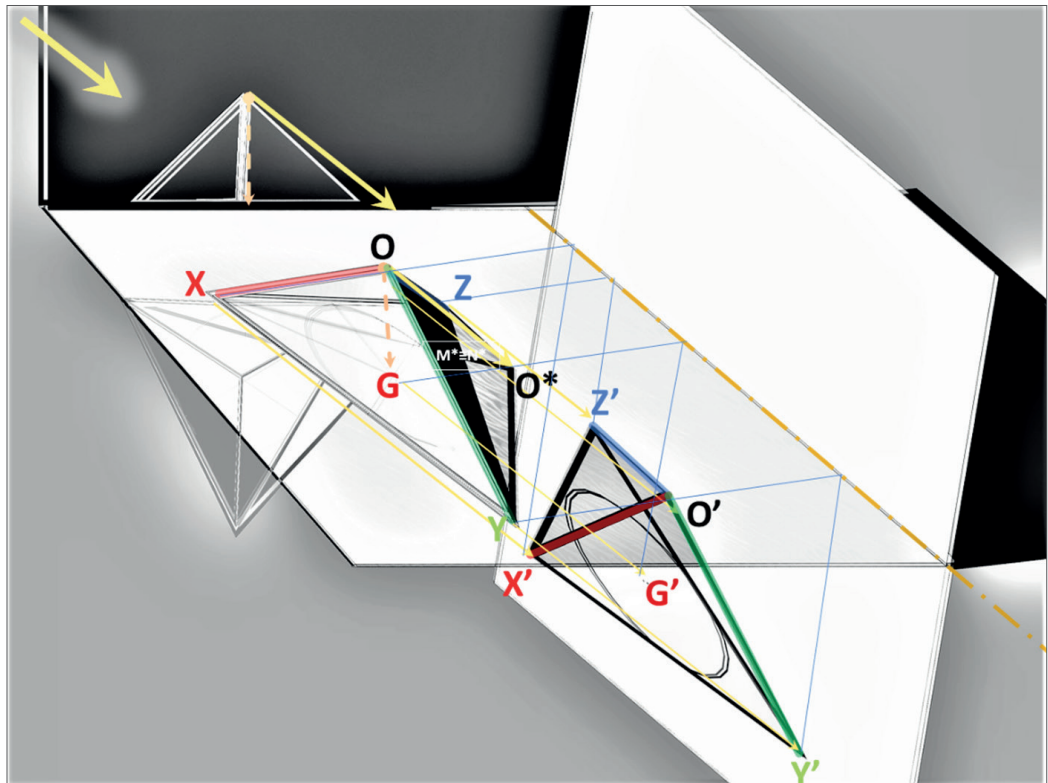


Fig. 05. Diagram showing the assumptions of our proof of Pohlke's theorem. Graphic by the author.

It is now proved [Kalman 2008] that that *inellipse* is unique and univocal for each triangle. This allows, given any triangle $X'Y'Z'$, to construct its Steiner inellipse as an affine transformation of an equilateral triangle with a side coinciding with any of the three sides of the given $X'Y'Z'$ and centre of gravity G^* . Graphically, it is only a question of plotting the affinity that has axis on any side of $X'Y'Z'$ and centre in the direction $G'G^*$ finding (Fig. 06) which pair of orthogonal diameters of the circle in G^* is transformed in the axes of the *inellipse* with centre G .

Lemma 2

There are infinite homological affinities in the $X'Y'Z'$ plane which all have an improper centre in the $G'O'$ direction and which transform the trilateral $X'Y'Z'$ in its plane into two infinite equivalent arrays of equilateral trilaterals $X'Y'Z'$ one symmetrical to the other with respect to the position normal to $G'O'$ (figs. 07, 08).

Proof

By drawing any of the aforementioned homological affinities (fig. 09) we interpret (fig. 10) the affinity axis as a common line of the $X'Y'Z'$ and XYZ planes. Reading XYZ as an equilateral plan of the supposed three-rectangle tetrahedron in O , one draws the second orthogonal projection in the direction normal to the affinity axis which, being a projecting straight line of this "elevation", will be represented by a point; while the GO height of the pyramid will be in true shape and size, and, with it, the direction OO^* is represented which projects $OXYZ$ into $O'X'Y'Z'$. Finally, interpret $X'Y'Z'$ as an overturned figure in true form on the XYZ plane; in the corresponding elevation it is possible to trace the circular arcs centred in the elevation point of the axis and which are those crossed by the overturning of $O'G'X'Y'Z'$ until reaching the corresponding straight lines in the direction OO^* passing through $XYZG$.

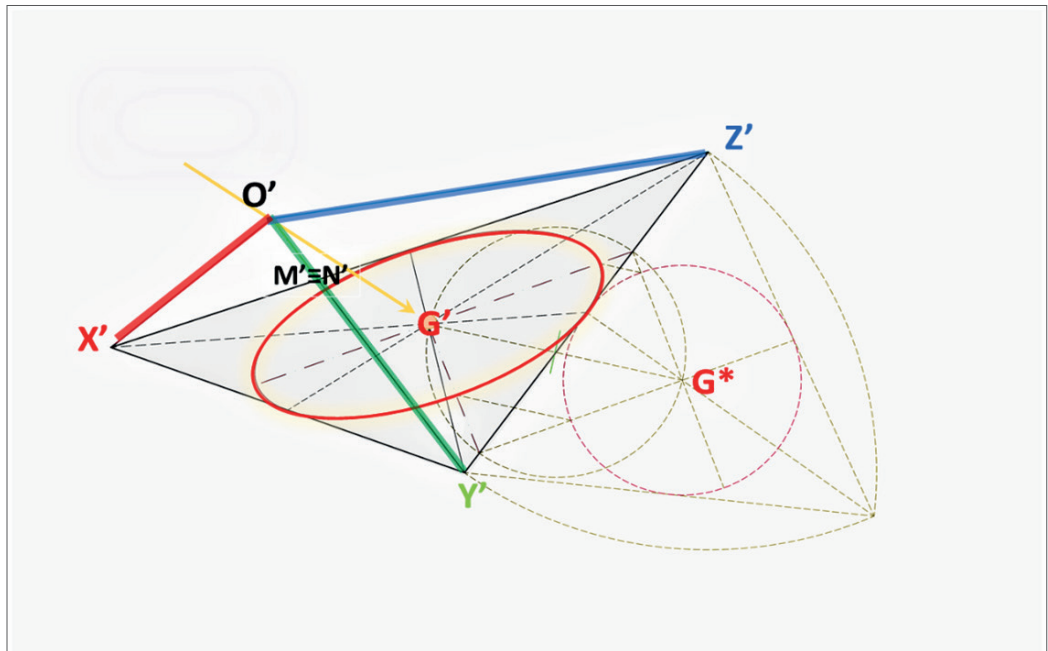


Fig. 06. Determination of Steiner's inellipse in $X'Y'Z'$ by homological affinity of centre in the direction $G'G^*$. Graphic by the author.

This returns the dihedral angle between $X'Y'Z'$ and XYZ , as if we had folded the affinity drawing along its axis until the points of the two parts of the sheet are aligned along the corresponding projection planes in the direction OO^*O' orthogonal to XYZ . We have – q.e.d. - drawn one of the four infinities of equivalent tetrahedra that satisfy the theorem, since the solution also holds for the symmetrical ones of $OXYZ$ with respect to the direction OO' and for their translations in the symmetrical direction of OO' in O' with respect to the plane $X'Y'Z'$.

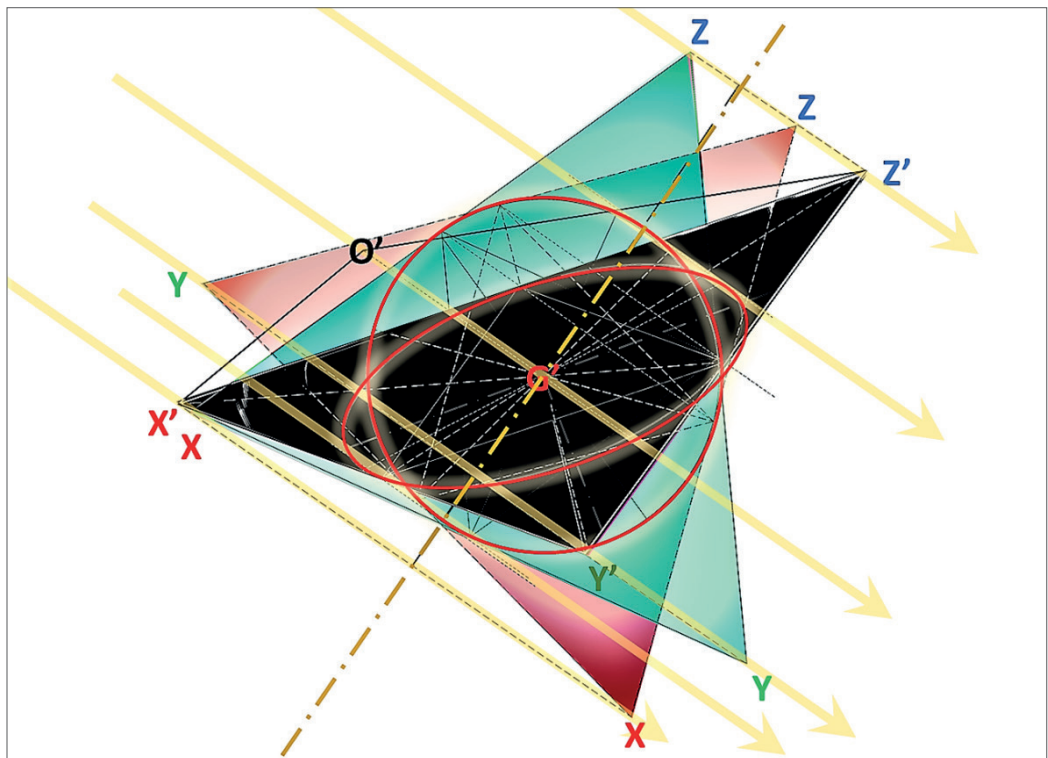


Fig. 07. Centre affinity in the direction $O'G'$ which transforms Steiner's inellipse of $X'Y'Z'$ in the circle inscribed in symmetrical equilateral triangles XYZ corresponding to $X'Y'Z'$ in the same affinity. This is due to the fact that the arrays of tetrahedra that respond to the theorem are four: two symmetrical with respect to the OO' direction and two symmetrical in the symmetrical direction of OO' with respect to the $X'Y'Z'$ plane. Graphic by the author.

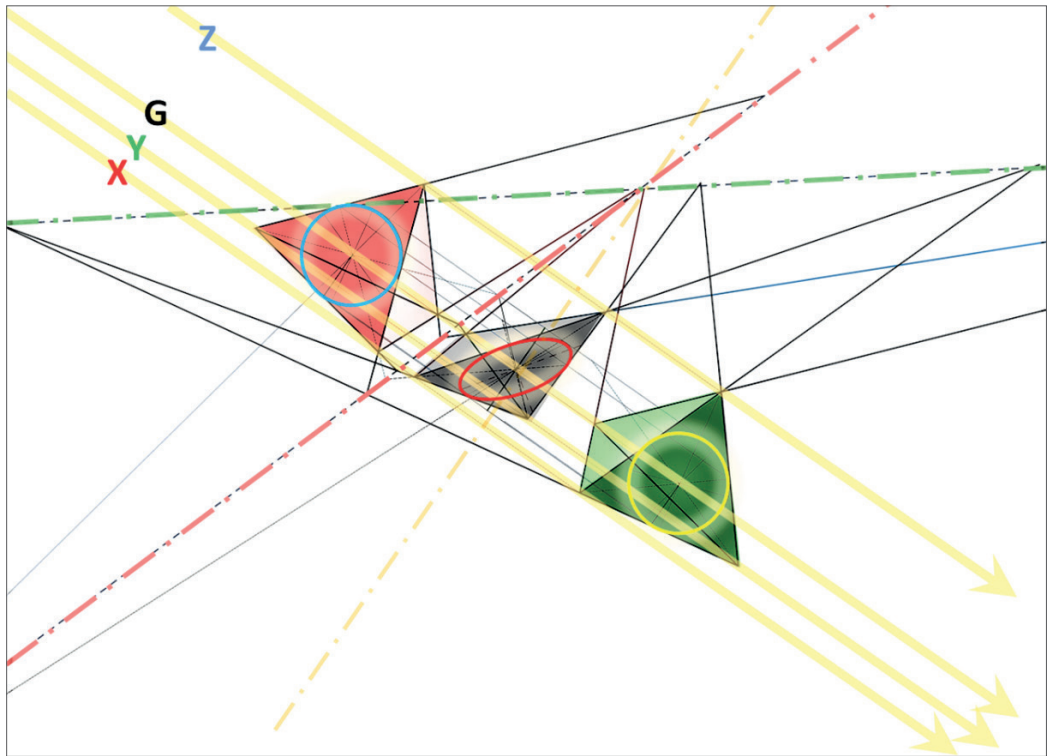


Fig. 08. In addition to the objective tetrahedrons equivalent to three-rectangles in O that are projected in $O'X'Y'Z'$ in the direction OO' , also their symmetric ones with respect to the direction OO' , those along the symmetrical direction of OO' in relation to the plane satisfy the theorem XYZ and their symmetricals. Graphic by the author.

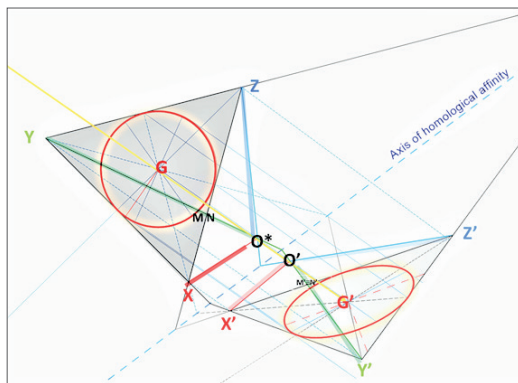


Fig. 09. Construction of one of the possible affinities between $O'X'Y'Z'$ and $O^*X^*Y^*Z^*$. Graphic by the author.

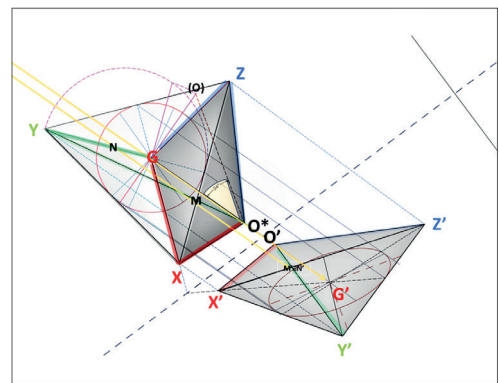


Fig. 10. Interpretation of the figure $XYZO^*$ as a plan of the right pyramid in G : determination of the overturning in true form of the height OG and the direction of projection OO^* with respect to the XYZ position. Graphic by the author.

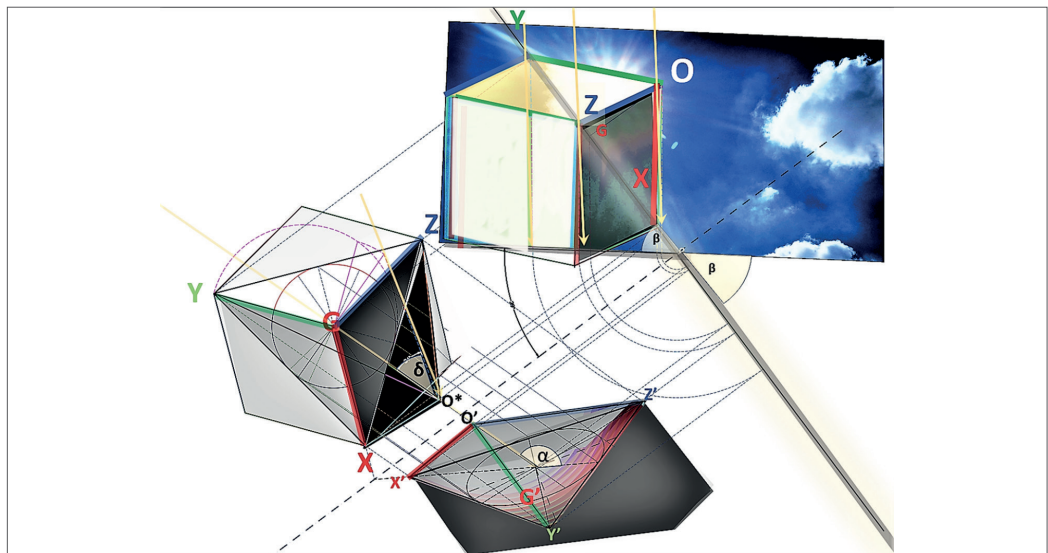


Fig. 11. Demonstration in double orthogonal projection of the $OXYZ$ pyramid and determination of the dihedral angle between the XYZ and $X'Y'Z'$ planes. Graphic by the author.

References

- Bertan, F. (1994). Strumenti e metodi per il disegno. In Scolaril, M., Borghinil, M. (a cura di) *Teorie e metodi del disegno*. Milano: CittàStudi.
- Bozzi, P. (1998). *Fisica ingenua: studi di psicologia della percezione*. Milano: Garzanti.
- Brigaglia, A., Ciliberto, C. (1998). La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali. In Di Sieno, S., Guerraggio, A., Nastasi, P. (a cura di). *La matematica italiana dopo l'unità*. Milano: Marcos y Marcos.
- Campedelli, L. (1972). *Lezioni di geometria*. Vol. 2°. Parte prima. I metodi di rappresentazione della geometria descrittiva. Padova: Cedam.
- Candito, C. (2003). *Le proiezioni assonometriche: dalla prospettiva isometrica all'individuazione dei fondamenti del disegno assonometrico*. Firenze: Alinea editrice.
- Cunningham, A.W. (1868). *Notes on the history, methods, and technological importance of descriptive geometry*. Edinburgh: Edmonston and Douglas.
- De Carlo, L. (2012). La prospettiva parallela come metodo: una visione storica. In Migliari, R., Carlevaris, L., (a cura di) *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi Editore.
- Docci, M., Migliari, R. (1999). *Scienza della rappresentazione: fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*. Roma: Carocci.
- Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Toronto: Dover Publications.
- Emch, A. (1918). Proof of Pohlke's theorem and its generalizations by affinity. In *American Journal of Mathematics*, n. 40 (4) (1918), pp. 366–374.
- Enriques, F. (1906). *Problemi della scienza*. Bologna: Ditta N. Zanichelli.
- Gay, F. (2001). *Fondamenti geometrici del disegno*. Padova: Libreria il Progetto.
- Kalman, D. (2008). An Elementary Proof of Marden's Theorem. In *American Mathematical Monthly* 115, pp.330–338.
- Loria, G. (1921). *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.
- Loria, G. (1925). *Metodi di geometria descrittiva*. Milano: Hoepli.
- Manfrin, R. (2018). A proof of Pohlke's theorem with an analytic determination of the reference trihedron. In *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 22 (2018), n. 2, pp. 195-205.
- Pohlke, K. W. (1860). *Darstellende Geometrie*: zunächst für den Gebrauch bei den Vorträgen an der Königlichen Bau-Akadmie und dem Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin. Abth. I, Tafeln Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrien. Berlin: Gaertner.
- Pohlke, K. W. (1876). *Darstellende Geometrie*. Taf.2, Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrie. Berlin: Gaertner.
- Poncelet, J. V. (1865). *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Second part. Paris: Gauthier-Villars.
- Sklenarikova, Z., Pemova, M. (2007). The Pohlke–Schwarz theorem and its relevancy in the didactics of mathematics. In *Quaderni di Ricerca in Didattica* n.17. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo).
- Steiner, J. (1858). *Vermischte Sätze und Aufgaben*. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reimer.
- Toulias, L.T., Lefkaditis, G. E., Markatis, S. (2016). *The four ellipses problem*. In *International journal of geometry*. Vol. 5 (2016), No. 2, pp. 77-92.

Author

Fabrizio Gay, Università IUAV di Venezia, Laboratorio di Teoria delle immagini, fabrizio@iuav.it

To cite this chapter: Gay Fabrizio (2022). Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria/ Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry. In Battini C., Bistagnino E. (a cura di). *Dialoghi. Visioni e visualità. Testimoniare Comunicare Sperimentare. Atti del 43° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Dialogues. Visions and visuality. Witnessing Communicating Experimenting. Proceedings of the 43rd International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 2503-2522.